Direction des Statistiques Démographiques et Sociales

F1706

Indices de prix à la consommation

Patrick Sillard

Document de travail

Institut National de la Statistique et des Études Économiques

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

Série des Documents de Travail
de la
DIRECTION DES STATISTIQUES DÉMOGRAPHIQUES ET SOCIALES

N° F1706

Indices de prix à la consommation

PATRICK SILLARD *

Document de travail

août 2017

* division des prix à la consommation, Unité des prix à la consommation et des enquêtes ménages, DSDS au moment de la rédaction de ce document.

Indices de prix

à la consommation

Patrick Sillard

7 août 2017

RÉSUMÉ – ABSTRACT

Ce texte explore les fondements théoriques modernes des indices de prix à la consommation (IPC). Il est désormais admis par la communauté internationale que le cadre microéconomique de la théorie du consommateur constitue un des fondements naturels des IPC. Les enseignements de cette théorie sont examinés aux chapitres IV et V. Après un chapitre introductif qui dresse quelques perspectives historiques et fixe les grandes idées sur la construction des IPC, le chapitre II est consacré aux aspects calculatoires des indices de Laspeyres. Le chapitre III est consacré à la théorie axiomatique qui établit des propriétés souhaitables aux IPC (i.e. des axiomes) et en déduit une sorte de taxonomie des formules d'indices en relation à ces propriétés. Enfin, le chapitre VI propose, en guise de conclusion de l'ensemble, une construction (au sens de la métrologie) d'un indice de prix avec application au cas de l'IPC français.

This text explores the modern theoretical fondations of the consumer price indices (CPI). It is now admitted by the international comunity that the microeconomic framework of the consumer theory is a natural framework for CPIs. This text is devoted to the consequences of this theory which are studied in detail at chapters IV and V. After an introductory chapter which draws some historical perspectives and gives the main ideas, the computational issues of Laspeyres indices and agregation are presented in chapter II. Chapter III presents the axiomatic theory which sets some desirable properties to price indices and classifies the various price index formulae with respect to these properties. The last chapter (VI) is an attempt to build, in the sense of metrology, a price index. This is applied to the French CPI.

JEL Codes : E31 ; C43 ; D11 ; B41.
Key-words : Price indices, CPI, axiomatic theory, consumer theory, constant utility price index, Cost of living index, COLI, quality adjustment.

Table des matières

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Un indice des prix est un indicateur économique synthétique ayant vocation à décrire l'évolution générale des prix. L'indice des prix à la consommation (IPC) retrace l'évolution des prix à la consommation domestique des ménages, c'est-à-dire la consommation finale de biens [1] réalisée par les ménages. Économiquement, lorsqu'un bien est consommé par les ménages, il sort de l'économie marchande et, hormis sur le marché de l'occasion pour certains d'entre eux, n'a pas vocation à y revenir.
La consommation couvre donc un champ très large des dépenses des ménages et son périmètre exact est l'objet de conventions relevant de la Comptabilité nationale. Par exemple, conventionnellement, la consommation se limite aux achats de biens hors investissements. Par exemple, l'achat d'un bien immobilier n'est pas de la consommation dans la mesure où le bien immobilier est un capital susceptible de revenir dans l'économie à travers le marché de l'immobilier ancien. Ce type de bien a l'essentiel des caractéristiques économiques du capital :

- existence d'un marché propre et en particulier caractérisé par une dynamique spécifique ;
- prix évoluant, pour l'essentiel, indépendamment de la date d'acquisition du bien et en fonction des investissements réalisés entre la date d'acquisition et la date de revente selon un schéma classique de dépréciation/appréciation du capital [2].

La conventions retenues dans le calcul de l'IPC sont détaillées au chapitre VI.

Les débats, voire les controverses, sur la mesure de l'inflation sont quasiment aussi anciennes que les mesures elles-mêmes. En effet, aujourd'hui comme hier,

1. On entend ici bien au sens large. Cette notion englobe les produits physiques comme les services.
2. A l'extrême, lorsque le bien est mis en location, il s'agit alors d'un bien de nature purement capitalistique.

beaucoup de français pensent que l'inflation est sous-estimée par l'indice des prix à la consommation (IPC). Sans remonter à la création de l'IPC (1914), lors des années 1950-1980, période de forte inflation en France, le débat fut d'une extrême sensibilité compte tenu des pratiques qui s'étaient généralisées dans la plupart des branches économiques d'indexer les salaires sur l'inflation. Cette généralisation a été favorisée par la centralisation progressive qu'ont connue les négociations salariales sur la période (Piriou 1986). L'indexation du salaire minimum sur l'IPC [3] a, quant à elle, été inscrite dans la loi en 1952.
L'importance prise par la mesure de l'inflation dans les négociations salariales et la mise en cause de certaines conventions adoptées alors dans le calcul de l'IPC ont incité la CGT à déterminer son propre indice des prix à la consommation à partir de 1972. Il était calculé selon des principes réputés plus favorables au maintien du pouvoir d'achat des consommateurs. A l'origine fondé sur les relevés de prix réalisés par des enquêteurs de la CGT, dans l'agglomération parisienne, l'« indice-CGT » a progressivement perdu de son audience à mesure que le niveau d'inflation diminuait en France. Sa publication a cessé en 1998.
Même si la portée des critiques est amoindrie par la baisse du niveau d'inflation, celles-ci continuent d'exister. Le principal sujet de discussion porte sur la pondération des segments de consommation dans l'IPC qui, d'après ses détracteurs, donne la part trop belle à des segments dont les prix évoluent peu, voire diminuent en raison de la prise en compte du progrès technique dans le calcul (l'IPC est un indice à qualité constante). Ce dernier point est lui-même l'objet de débats. Ces derniers ont perduré à peu près dans les mêmes termes jusqu'à aujourd'hui même si les travaux considérables d'harmonisation réalisés au niveau européen depuis 1990 ont largement permis de relativiser les critiques et de dégager un quasi-consensus entre les états-membres de l'Union.

Un autre débat qui s'est développé à la fin des années 1990 aux Etats-Unis a été suivi avec une très grande attention en France et en Europe (Boskin, Dulberger, Gordon, Griliches & Jorgenson 1998). Il est vrai que, pour une fois, les griefs reprochés à l'indice des prix ne portaient pas sur le fait que l'indice sous-estime l'inflation, comme en France, mais plutôt qu'il la surestime. Ce débat à fait l'objet d'une commission d'enquête du Congrès américain présidée par M. Boskin. Cette commission a auditionné de nombreux économistes de renom. Beaucoup ont en effet insisté sur le fait que l'indice américain, dans sa configuration d'alors, sous-estimait les phénomènes de substitution à l'œuvre entre produits et partant, surestimait l'inflation. En effet, et de manière générale, on observe que le consommateur achète plus volontiers les produits dont le rapport qualité/prix perçu est plus favorable pour lui, c'est-à-dire que sa consommation se déforme progressivement vers les produits dont les prix relatifs évo-

3. ou un indice qui en dérive

luent plus favorablement que les autres. Lorsqu'un panier [4] censé représenter les achats moyens du moment est en réalité représentatif d'une structure obsolète des achats, les phénomènes de substitutions qui se sont produits entre temps sont ignorés et l'inflation est surestimée.
Or, l'indice américain était fondé sur le suivi d'un panier fixe de biens dont le renouvellement était peu fréquent, de sorte que ce panier perdait, avec le temps, en représentativité par rapport à la consommation contemporaine.
Ce phénomène de substitution perpétuel est au cœur de la dynamique de consommation et sa prise en compte dans la mesure de l'inflation est pleinement justifiée. Une des clés pour cela est le renouvellement fréquent de l'échantillon de produits suivis dans l'indice des prix. La critique de l'obsolescence du panier était *de facto* peu justifiée pour l'IPC français dont le panier était revu tous les ans (Lequiller 1997), mais cette critique a été prise très au sérieux par les pays européens et Eurostat.

Ces éléments historiques sont utiles pour apprécier les différentes étapes qui président aux conventions retenues dans les IPC. L'une d'entre elles concerne la procédure d'agrégation, c'est-à-dire celle qui consiste à passer des évolutions moyennes de prix portant sur des secteurs fins de la consommation (exemple : les baguettes de pain) à un indice global. L'une des critiques soulevée lors des débats qui ont débouché sur la publication de l'« indice-CGT » portait précisément sur les choix réalisés en la matière, notamment sur le trop grand poids qui serait accordé, dans l'IPC, à des types de produits dont les prix évoluent peu et le trop faible poids qui serait accordé à des produits dont les prix sont beaucoup plus dynamiques. Ce sujet du passage du particulier au général est exposé en détail au chapitre II.
Les travaux de la Commission Boskin illustrent quant à eux la prise en compte, dans le calcul de l'IPC, des phénomènes de substitution très généralement à l'œuvre dans la consommation des ménages. Leur prise en compte dans les IPC est un sujet complexe qui repose sur la modélisation microéconomique du comportement des consommateurs. Ces sujets sont examinés en détail aux chapitres IV et V.

D'autres dimensions semblent moins bien identifiées par les critiques des indices de prix alors qu'elles peuvent pourtant se révéler d'importance considérable sur les résultats obtenus. Il s'agit de l'ensemble des opérations permettant de passer de relevés élémentaires de prix à des indices reflétant l'évolution moyenne des prix sur des secteurs fins de la consommation (exemple : les baguettes de pain ou les machines à laver).

4. On utilise indifféremment le terme de panier de biens suivis ou d'échantillon de bien suivis pour désigner l'ensemble des produits dont les prix sont observés pour mesurer l'inflation, au sein d'un IPC particulier.

Ces opérations sont présentées en détail aux chapitres III, IV et V. Il est cependant utile de les illustrer dès à présent sur un exemple simple de calcul d'indice destiné à traduire l'évolution moyenne des prix d'un ensemble de machines à laver.

Supposons pour l'exemple que l'univers des dépenses de consommation comprenne 3 machines X, Y et Z. Les prix observés pour ces machines sur 3 mois consécutifs sont indiqués à la table I.1. Au premier mois, les deux machines X et Y sont vendues. La troisième machine (Z) n'apparaît qu'au deuxième mois. Au deuxième mois, toutes les machines X, Y, et Z sont en vente. Au troisième mois en revanche, la machine X n'est plus vendue.

TABLE I.1 – Prix des machines à laver X, Y, Z au cours du temps

machines	Mois		
	1	2	3
X	100	110	
Y	200	220	190
Z		300	320
Indice de prix moyen	100 (150)	140 (210)	170 (255)

Note : les chiffres entre parenthèses dans la partie inférieure du tableau correspondent aux prix moyens sur la période. Ils sont utilisés pour calculer l'indice de prix moyen figurant également dans la partie inférieure du tableau.

Pour apprécier l'évolution moyenne des prix, on peut d'abord penser à suivre l'évolution du prix moyen des machines vendues. L'usage est de retracer les évolutions à l'aide d'un indice qui vaut conventionnellement 100 à une période de base, les périodes suivantes évoluant proportionnellement par rapport à la période de base. Cette pratique permet de lire très commodément l'évolution qu'ont connue les prix entre une période courante et la période de base. Par exemple un indice 140 signifie que les prix ont crû de 40% depuis la période de base.
La partie inférieure de la table I.1 donne le prix moyen des machines vendues ; l'évolution de ce prix moyen y est retracée par un indice de prix moyen. Le problème évident de cet indice est qu'il traduit davantage les évolutions du contour du panier que celles des prix. Pourtant, la machine Z qui est approximativement trois fois plus chère que la machine X n'offre vraisemblablement pas les mêmes fonctionnalités que la machine X. Par conséquent, le prix moyen en période 3 beaucoup plus élevé que celui de la période 1 traduit peut-être des niveaux de prix globalement plus élevés mais aussi, une offre dont les fonc-

tionnalités sont vraisemblablement supérieures à celles de la période 1. Dans la mesure de l'inflation, seule l'évolution « pure » des prix nous intéresse.

Une possibilité pour améliorer le calcul serait de « chaîner » les transitions [mois 1]→[mois 2] et [mois 2]→[mois 3] en calculant chacune d'entre elles sur un périmètre commun aux deux mois impliqués dans la transition. Ainsi, l'indice du deuxième mois par rapport au premier mois vaut [5] :

$$I_{ch}^{2/1} = \frac{110 + 220}{100 + 200} \times 100 = 110$$

et l'indice du troisième mois par rapport au premier mois vaut :

$$I_{ch}^{3/1} = \underbrace{\frac{190 + 320}{220 + 300}}_{I_{ch}^{3/2}} \times \underbrace{110}_{I_{ch}^{2/1}} = 108$$

Cet indice est un indice chaîné mensuellement. On note que sa trajectoire est nettement différente de celle du prix moyen. Cet indice est certainement plus satisfaisant que l'indice de prix moyen car il est moins directement affecté par la structure du panier de biens vendus. En effet, la mise en vente d'une machine plus onéreuse ne se traduit pas par une simple hausse des prix pour le consommateur car cette machine peut remplir des services supérieurs (ou inférieurs) à ceux rendus par les machines disponibles jusqu'alors.
Cet indice chaîné, bien que plus satisfaisant que le précédant, ne possède cependant pas toutes les bonnes propriétés car sa trajectoire peut être fortement affectée par la chronique des entrées-sorties successives de biens. Par exemple imaginons qu'un quatrième mois identique au premier survienne (cf. table I.2). Comme les prix et les produits présents sont identiques à ceux du premier mois, un « bon » indice devrait conclure que les prix sont inchangés par rapport au premier mois et devrait donc être égal à 100 au quatrième mois. Dans le cas présent, l'indice chaîné vaudrait :

$$I_{ch}^{4/1} = \underbrace{\frac{200}{190}}_{I_{ch}^{4/3}} \times \underbrace{108}_{I_{ch}^{3/1}} = 114$$

ce qui n'est évidemment pas satisfaisant.
Notons à ce stade que par rapport à l'évolution du prix moyen, l'indice chaîné fait intervenir chaque produit à travers son évolution, et non sa contribution à un prix moyen d'ensemble sur une période. En effet, chaque indice [M/M-1] est un indice de Laspeyres opérant sur les ratios de prix [6] p^M/p^{M-1} observés

5. $I_{ch}^{3/2}$ correspond à l'indice du troisième mois par rapport au deuxième. Il est calculé de la même manière que l'indice $I_{ch}^{2/1}$ *supra*.

6. Par exemple, on peut écrire $I_{ch}^{2/1}$ sous la forme $I_{ch}^{2/1} = \alpha_X \frac{p_X^2}{p_X^1} + \alpha_Y \frac{p_Y^2}{p_Y^1}$ où α_Q représente le poids de la machine Q dans la dépense de la première période et p_Q^M est le prix de la machine Q au mois M.

pour chacun des biens composant le panier (et uniquement pour ceux-là). C'est une caractéristique partagée par la plupart des indices de prix utilisés habituellement.

TABLE I.2 – Les différents indices examinés

machines	Mois			
	1	2	3	4
X	100	110	*(117)*	100
Y	200	220	190	200
Z		300	320	
Indice de prix moy.	100	140	170	100
Indice chaîné mensuel	100	110	108	114
Indice qualité constante	100	110	102	100

Lecture : En troisième période, le prix de la machine Z au niveau de qualité de X est 117 (noté entre parenthèses). Puis en quatrième période, le prix de la machine X au niveau de qualité X est 100 (observé).

La pratique des indices européens et de l'IPC en particulier, consiste à considérer qu'en première période, le consommateur peut acheter un panier comprenant deux biens. Ce panier est désormais fixé et c'est le prix d'un panier homologue à ce panier initial, c'est-à-dire avec le même niveau de qualité, que l'on va suivre. Le détail du calcul de l'indice à qualité constante, noté I_{QC}, est le suivant :

- En deuxième période, les deux biens sont toujours disponibles à la vente. L'indice vaut :

$$I_{QC}^{2/1} = \frac{110 + 220}{100 + 200} \times 100 = 110$$

- En troisième période, la machine X n'est pas présente mais la machine Z la remplace modulo un ajustement qualité.

En effet, deux produits dont les caractéristiques diffèrent n'ont pas de raisons d'avoir le même prix : leurs coûts de production sont différents et l'utilité qu'en tirent les consommateurs n'est pas la même. La différence de prix entre la machine Z au mois 3 et la machine X au mois 2 s'explique par, d'un part une différence de caractéristiques et, d'autre part, par l'évolution générale des prix entre les mois 2 et 3.

Différentes méthodes existent pour estimer la traduction en termes de prix de la différence de qualité (ou de caractéristiques) de deux produits. Une méthode commode dans le cas présent est la technique du recouvrement [7] : les machines X et Z sont présentes sur le marché au même moment (en deuxième période). À cette date, chacune des machines étant vendue à un prix de marché, la différence de prix observée révèle la valorisation que le consommateur représentatif [8] fait de la différence de qualité qu'il perçoit. Si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire si la différence de prix n'égalait pas la différence de qualité, alors le consommateur représentatif n'achèterait que la machine dont le rapport qualité/prix serait le plus favorable pour lui.

Le prix du bien Z « au niveau de qualité de X » est 110 en deuxième période. Le facteur correctif à appliquer au prix de Z pour atteindre un niveau de qualité X est $\frac{110}{300}$. En troisième période, le prix du bien Z au niveau de qualité X est donc [9] :

$$Z(X) = \frac{110}{300} \times 320 = 117$$

Moyennant quoi, l'indice à qualité constante en troisième période par rapport à la période 1 vaut :

$$I_{QC}^{3/1} = \frac{117 + 190}{100 + 200} \times 100 = 102$$

On note que si la quatrième période marque le retour à la configuration de première période, tant en ce qui concerne les machines disponibles que les prix pratiqués, alors [10] :

$$I_{QC}^{4/1} = 100$$

Ce comportement de l'indice à qualité constante est évidemment plus satisfaisant que celui constaté sur l'indice fondé sur le chaînage mensuel.

Au final, il apparaît que :

- l'évolution du prix moyen peut différer considérablement de celle d'un indice de prix et être affectée d'importants effets de structure ;
- un indice de prix fait intervenir des rapports de prix d'un même produit entre les deux périodes comparées ;
- un indice à qualité constante devrait être réversible, c'est-à-dire que son niveau devrait revenir au niveau d'origine si tous les prix reviennent à leur niveau d'origine.

7. non pratiquée dans l'IPC, mais les méthodes utilisées reposent sur les mêmes concepts.
8. On pourrait utiliser le terme plus naturel « les consommateurs », mais celui-ci est moins cohérent, compte-tenu du raisonnement appliqué. Voir à ce propos le chapitre V.
9. Cette correction est appelée « ajustement qualité » dans la terminologie usuelle des indices de prix.
10. Formellement, X remplace Z et un ajustement qualité est réalisé, symétrique de celui pratiqué lors du remplacement X par Z en troisième période, toujours par recouvrement lors de la période 2.

Sur les trois indices figurant dans le tableau I.2, seul l'indice à qualité constante homologue à l'IPC présente un comportement satisfaisant eu égard aux trois remarques précédentes.

On remarque également que l'intuition qui consiste à penser qu'un indicateur d'évolution des prix pourrait correspondre à l'évolution d'une moyenne de prix n'est pas très éloignée de la réalité : elle nécessite simplement d'être un peu travaillée. En effet, l'indice à qualité constante correspond à l'évolution d'une moyenne de prix de produits. Cependant, elle est calculée sur un nombre de produits identique au cours du temps et sur lesquels des ajustements qualité sont réalisés pour assurer que l'indice se réfère à un niveau de qualité constant au cours du temps.

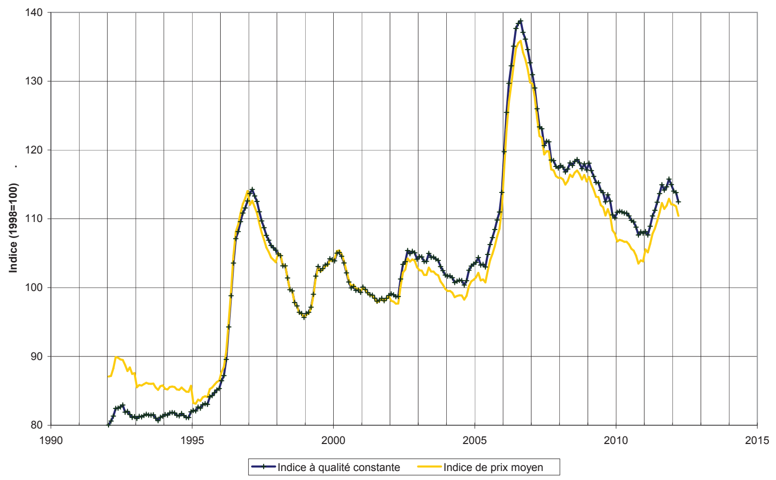
Afin d'illustrer cet exemple sur des données réelles, le graphique I.3 montre l'évolution du prix moyen mensuel (rapporté au niveau moyen de l'année 1998) et de l'indice des prix à la consommation de la variété « huile d'olive vierge extra ». L'indice est, par construction, à qualité constante et exprimé en base 1998=100. Cette variété est observée en métropole et s'appuie sur des produits relativement homogènes. Pour ce type de produits, les ajustements qualité étant de faible ampleur, l'évolution du prix moyen est voisine de celle de l'indice à qualité constante. C'est ce qu'on constate ici sur l'ensemble de la période 1992-2012.
S'agissant de l'indice, on peut distinguer trois périodes :

- avant 1996, l'indice de prix moyen est plus élevé que l'indice à qualité constante ;
- entre 1996 et 2003, les courbes d'évolution sont pratiquement confondues ;
- à partir de 2003, l'indice de prix moyen est moins élevé que l'indice à qualité constante.

Sur l'ensemble de la période et selon une tendance de long terme, l'indice des prix à qualité constante est plus dynamique que le prix moyen. En effet, entre 1992 et 2012, le prix moyen a augmenté de 27%, tandis que l'indice à qualité constante connaissait une hausse de 41%, supérieure à celle du prix moyen. En d'autres termes, conditionnellement à la moyenne (mensuelle) des prix des produits de la variété « huile d'olive vierge extra » suivis dans l'IPC, le niveau de qualité paraît légèrement diminuer sur l'ensemble de la période.

Ces développements illustrent de manière heuristique quelques unes des étapes clés de la construction des IPC. Elles sont détaillées aux chapitres suivants. Le chapitre II est consacré aux aspects calculatoires des indices de Laspeyres et le chapitre III, à la théorie axiomatique qui fixe des propriétés souhaitables aux IPC (i.e. des axiomes) et en déduit une sorte de taxonomie des

TABLE I.3 – Indices à qualité constante et de prix moyen pour la variété « huile d'olive vierge extra »



Source : IPC, observations de prix en métropole entre 1992 et 2013.

formules d'indices en relation à ces propriétés. Ce texte examine ensuite les enseignements de la théorie du consommateur aux chapitres IV et V. Enfin, un dernier chapitre (VI) propose, en guise de conclusion de l'ensemble, une construction (au sens de la métrologie) d'un indice de prix avec application au cas de l'IPC français.

CHAPITRE II

AGRÉGATION DE LASPEYRES ET CHAÎNAGE

II.1. Le principe de base : le suivi d'un panier de biens

La consommation, à un instant donné, est l'acte d'achat par les ménages d'un ensemble de biens $i \in \mathcal{I}$. Ces biens sont vendus en divers lieux et on repère par un indice $k \in K_i$ l'ensemble des produits de type i disponibles à la vente à l'instant t. i et k ne dépendent pas, sauf avis contraire, de l'instant considéré. En revanche, k dépend de i.
En pratique, on s'intéresse à la consommation sur une période élémentaire de temps. On note t une telle période. En pratique, en France, une période élémentaire correspond à un mois.
Sur une telle période, chaque produit $k(i)$ est vendu dans une quantité $q_{ik}(t)$. On fait l'hypothèse que sur une période élémentaire, les prix ne changent pas [1] : le produit $k(i)$ est vendu au prix $p_{ik}(t)$. Il en découle que la dépense (réelle) consentie par les ménages lors de la période élémentaire t est :

$$D(t) = \sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t) \tag{II.1}$$

Introduisons à présent une période de référence, appelée base, et notée 0. De la même manière que précédemment, on peut définir $D(0)$ la dépense consentie par les ménages lors de la période 0. Durant la période 0, ils consomment une

1. En pratique, sur une période élémentaire de temps, cette hypothèse peut se révéler excessive. C'est le cas, par exemple, pour une période élémentaire d'une durée d'un mois, comme pratiqué en France. Sur cette durée, les prix évoluent. Pour contourner la difficulté, il suffit de considérer, dans ces formules, qu'un produit $k(i)$ correspond aux ventes d'un jour donné, celles d'un autre jour du mois correspondant à un autre produit. C'est ce qui est fait dans l'IPC français où chaque jour de collecte du mois se voit affecté d'un numéro d'ordre, de 1 à 20 (il y a 20 jours de collecte terrain par mois de collecte IPC) ; les produits $k(i)$ sont définis sur la cellule de consommation élémentaire correspondant au croisement du type de produit, du point de vente de collecte et du jour de collecte dans le mois.

quantité $q_{ik}(0)$ de chaque produit $k(i)$ à un prix $p_{ik}(0)$. Les dépenses $D(0)$ et $D(t)$ différent, d'une part parce que les quantités ont évolué, mais aussi parce que les prix ont évolué. Il est possible de séparer les deux sources d'évolution en notant que :

$$\frac{D(t)}{D(0)} = \frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)} \times \frac{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \tag{II.2}$$

On peut aussi noter que :

$$\frac{D(t)}{D(0)} = \frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)} \times \frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \tag{II.3}$$

Formellement, il est possible de distinguer quatre statistiques qui informent sur les sources d'évolution :

- les évolutions dues aux quantités peuvent se mesurer, soit en référence aux prix de la période 0 $\left[\frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right]$, soit en référence aux prix de la période t $\left[\frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}\right]$. Dans les deux cas, les paniers différents des périodes 0 et t sont déterminés avec des prix identiques et la valeur d'un panier ainsi calculée est rapportée à celle de l'autre. Les ratios précédent mesurent donc des évolutions de dépense associée à des quantité vendues différentes. On parle d'indice de volume. L'indice $\left[\frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right]$ est un indice de volume de Laspeyres. $\left[\frac{\sum_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}\right]$ est un indice de volume Paasche.
- les évolutions dues aux prix peuvent se mesurer, soit en référence aux quantités de la période 0 $\left[\frac{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right]$, soit en référence aux quan-

tités de la période t $\left[\dfrac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}\right]$. Dans les deux cas, les paniers des périodes 0 et t sont déterminées avec des quantités identiques. Les ratios précédents mesurent donc des évolutions de dépense associée à des prix de vente différents. $\left[\dfrac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right]$ est un indice de prix de Laspeyres. $\left[\dfrac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}\right]$ est un indice de prix de Paasche.

On peut noter que la décomposition de l'évolution de la dépense entre une évolution des prix et une évolution des quantités associe systématiquement un indice de Laspeyres à un indice de Paasche. La décomposition (II.2) associe un indice de quantité de Paasche et un indice de prix de Laspeyres :

$$\frac{D(t)}{D(0)} = \underbrace{\frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}}_{\text{Paasche des quantités}} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}}_{\text{Laspeyres des prix}}$$

De même, la décomposition (II.3) associe un indice de prix de Paasche et un indice de quantité de Laspeyres :

$$\frac{D(t)}{D(0)} = \underbrace{\frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}}_{\text{Paasche des prix}} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(t).p_{ik}(0)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}}_{\text{Laspeyres des quantités}}$$

II.2. L'indice de prix élémentaire et le lien avec l'indice d'ensemble

Nous définissons donc l'indice de prix élémentaire du bien i comme l'indice de prix de Laspeyres du bien i à la période t par rapport à la période 0, par :

$$I_i^{t,0} = \frac{\sum\limits_{k \in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{k \in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \tag{II.4}$$

De la même manière, nous pouvons définir l'indice de prix de Laspeyres de l'ensemble $\mathcal{I}$ du panier de biens à la période t par rapport à la période 0, par :

$$I^{t,0} = \frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \tag{II.5}$$

Il est possible d'écrire l'indice de prix du panier de biens $I^{t,0}$ en fonction des indices de prix de chacun des biens $I_i^{t,0}$. En effet,

$$\begin{aligned} I^{t,0} &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{\sum\limits_{k\in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \underbrace{\left(\frac{\sum\limits_{k\in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right)}_{s_i^0} \times \underbrace{\left(\frac{\sum\limits_{k\in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(t)}{\sum\limits_{k\in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}\right)}_{I_i^{t,0}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$I^{t,0} = \sum_{i\in\mathcal{I}} s_i^0 I_i^{t,0} \tag{II.6}$$

Ainsi, l'indice des prix d'ensemble apparaît comme une somme d'indices élémentaires de biens pondérée par la part s_i^0 de la dépense à la période 0 consacrée par les consommateurs à l'achat du bien i. Explicitement,

$$s_i^0 = \frac{\sum\limits_{k\in K_i} q_{ik}(0).p_{ik}(0)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}(0).p_{ik}(0)} \tag{II.7}$$

II.3. Le chaînage

En pratique, on souhaite pouvoir comparer des périodes 0 et t assez éloignées l'une de l'autre (typiquement plusieurs années). Dans ce contexte, l'usage d'une formule à base fixe se référant perpétuellement à une année 0 éloignée, comme posé par les formules (II.4) et (II.5), se heurte à la difficulté d'obsolescence du panier : les quantités utilisées $q_{ik}(0)$ pour déterminer l'indice de prix peuvent être très différentes des quantités consommées de manière contemporaine $q_{ik}(t)$. Moyennant quoi, l'indice de prix ainsi calculé peut traduire une évolution de prix assez décalée par rapport à la réalité de la consommation contemporaine, et ce d'autant plus que t est loin de 0. En effet, les faits suggèrent que la consommation s'adapte au cours du temps aux signaux donnés par les prix. En particulier, lorsque les prix relatifs [2] de biens substituables sont modifiés, alors les quantités relatives consommées sont, le plus souvent, modifiées dans un sens opposé à l'évolution des prix relatifs.

Moyennant quoi, en maintenant une base fixe trop longtemps, on est conduit à surpondérer les biens dont les prix augmentent relativement aux autres prix (ou diminuent moins que les autres) tandis qu'on sous-pondère les biens dont les prix relatifs diminuent. En conséquence, l'indice ainsi obtenu surévalue quant à lui l'inflation.

Pour limiter cet effet, les statisticiens des prix préconisent d'utiliser des indices chaînés. L'indice chaîné $\tilde{I}^{t,0}$ est calculé en deux temps :

1) Calcul d'un indice sur une base récente – disons $(t-1)$ – conformément à la formule (II.4), soit $I^{t,t-1}$;
2) calcul d'un indice chaîné $\tilde{I}^{t,0}$ à partir d'une relation de récurrence sur t, de la forme suivante [3] :

$$\begin{cases} \tilde{I}^{t,0} & = & \tilde{I}^{t-1,0} \times I^{t,t-1} \\ \tilde{I}^{0,0} & = & 100 \end{cases} \tag{II.8}$$

De la même manière, on définit l'indice chaîné $\tilde{I}_i^{t,0}$ du regroupement i de manière cohérente par :

$$\begin{cases} \tilde{I}_i^{t,0} & = & \tilde{I}_i^{t-1,0} \times I_i^{t,t-1} \\ \tilde{I}_i^{0,0} & = & 100 \end{cases}$$

Ainsi définis, $\tilde{I}_i^{t,0}$ et $\tilde{I}^{t,0}$ ne sont pas des indices de la forme (II.4). En particulier, la relation d'agrégation (II.6) vérifiée pour les indices à base fixe ($I_i^{t,\tau}$ et $I^{t,\tau}$ pour tout τ) n'est pas vérifiée pour les indices chaînés. Autrement dit, il n'existe pas de $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tels que l'inégalité suivante :

$$\tilde{I}^{t,0} \neq \sum_{i\in\mathcal{I}} s_i \tilde{I}_i^{t,0} \tag{II.9}$$

devienne une égalité.

II.4. Compatibilité ascendante et calcul des contributions

Comme on l'a vu (Eq. II.6), entre deux périodes de chaînage, l'indice vérifie des propriétés d'agrégation. Pour bien comprendre la façon dont cela se traduit, il est intéressant de se placer dans la situation où le champ de l'indice est décomposé en indices élémentaires reliés à un niveau d'agrégation intermédiaire

2. rapport des prix d'un couple de biens.
3. la valeur initiale de $I^{0,0}$ est conventionnelle et n'est pas caractéristique ; ici un exemple où $I^{0,0} = 100$.

(appelé classe ci-dessous). Ainsi, chaque indice élémentaire est repéré par un couple (i, k) d'entiers, $i \in \{1, \ldots, N\}$ faisant référence à la classe d'appartenance de l'indice élémentaire et $k \in \{1, \ldots, n(i)\}$ faisant référence à l'indice élémentaire au sein de la classe considérée (i en l'occurrence).
La règle d'agrégation (II.6) appliquée aux indices élémentaires conduit à :

$$I^{t,0} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n(i)} s_{ik}^{0} I_{ik}^{t,0} \tag{II.10}$$

où s_{ik}^{0} est la part de la dépense totale de consommation consacrée au bien élémentaire (i, k) lors de la période de base (0). Notons $s_i^0 = \sum_k s_{ik}^0$ et $\tilde{s}_{ik}^0 = \frac{s_{ik}^0}{s_i^0}$. Avec ces notations, $\tilde{s}_{ik}^0$ correspond, dans la dépense de consommation affectée à la classe i, à la part consacrée au bien élémentaire k. Ainsi, si on construit un indice de prix pour la classe i conformément au calcul de l'indice global, nous aurons :

$$I_i^{t,0} = \sum_{k=1}^{n(i)} \tilde{s}_{ik}^{0} I_{ik}^{t,0} \tag{II.11}$$

Il est possible de réorganiser l'expression (II.10) pour faire apparaître les indices de classe définis à l'équation (II.11) :

$$\begin{aligned} I^{t,0} &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n(i)} s_{ik}^{0} I_{ik}^{t,0} \\ &= \sum_{i=1}^{N} s_i^0 \sum_{k=1}^{n(i)} \tilde{s}_{ik}^{0} I_{ik}^{t,0} \\ &= \sum_{i=1}^{N} s_i^0 I_i^{t,0} \end{aligned} \tag{II.12}$$

Les relations (II.12) sont appelée règles de compatibilité ascendante. Cette compatibilité est assurée entres indices relatifs à la même base en l'absence de chaînage. En revanche, le chaînage fait perdre la compatibilité ascendante (voir relation II.9).

Il peut être intéressant de décomposer l'évolution de l'indice en fonction de l'évolution constatée des indices de classes. Cette décomposition en contributions s'appuie sur une décomposition arithmétique. En effet, si on reprend l'équation (II.6) ou l'équation (II.12) et que l'on considère une variation relative de l'indice $I^{t,0}$ entre deux instants quelconques (t, t'), nous avons [4], en notant

4. Nous prenons ici comme dénominateur $I^{t,0}$. Les résultats obtenus sont de forme équivalente lorsque l'on prend $I^{t',0}$ comme dénominateur.

$\Delta I^{t,0} = I^{t,0} - I^{t',0}$ et $\Delta I_i^{t,0} = I_i^{t,0} - I_i^{t',0}$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}} &= \frac{\Delta \sum_i s_i^0 I_i^{t,0}}{\sum_i s_i^0 I_i^{t,0}} \\ &= \frac{\sum_i s_i^0 \Delta I_i^{t,0}}{\sum_i s_i^0 I_i^{t,0}}\end{aligned}$$

Il en découle que

$$\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}} = \sum_i \underbrace{\left(\frac{s_i^0 I_i^{t,0}}{\sum_j s_j^0 I_j^{t,0}} \right)}_{\omega_i} \frac{\Delta I_i^{t,0}}{I_i^{t,0}} \tag{II.13}$$

Ainsi, étant données les variations élémentaires relatives des sous-indices $\frac{\Delta I_i^{t,0}}{I_i^{t,0}}$, il est possible de décomposer la variation relative totale de l'indice $\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}}$ en fonction des variations relatives des indices de classe. La contribution de la classe i est le produit de la variation relative de l'indice de la classe et du poids de cette classe dans l'indice initial (ω_i).

Imaginons à présent que l'indice soit décomposé en deux niveaux : un niveau de classe et un niveau élémentaire. Comme précédemment, le secteur élémentaire de deuxième niveau est repéré par deux entiers [5] (i, k). Il y a dés lors deux manière de décomposer les contributions :

1. $\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}}$ se décompose en contributions de premier niveau (classes), ces dernières se décomposant en contributions de deuxième niveau ;
2. les contributions de deuxième niveau offrent une partition du champ total couvert par l'indice, au même titre que les contributions de premier niveau. Par conséquent, $\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}}$ peut se décomposer directement en contributions de deuxième niveau.

Nous allons montrer que sous l'hypothèse de compatibilité ascendante (eq. II.12), les deux approches sont équivalentes.

La première option de calcul évoquée *supra* fait intervenir deux jeux de relations, directement issues de la compatibilité ascendante, l'équation (II.13) et son équivalent de deuxième niveau :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}} &= \sum_i \omega_i \frac{\Delta I_i^{t,0}}{I_i^{t,0}} \\ \frac{\Delta I_i^{t,0}}{I_i^{t,0}} &= \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \frac{\Delta I_{i,k}^{t,0}}{I_{i,k}^{t,0}} \end{aligned} \right. \tag{II.14}$$

5. Formellement, k dépend de i.

En substituant aux termes de la première équation, ceux de la deuxième, nous avons :

$$\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}} = \sum_{i,k} \omega_i \, \tilde{\omega}_{i,k} \frac{\Delta I^{t,0}_{i,k}}{I^{t,0}_{i,k}} \tag{II.15}$$

avec

$$\omega_i = \frac{s_i^0 I_i^{t,0}}{\sum_j s_j^0 I_j^{t,0}} \text{ et } \tilde{\omega}_{i,k} = \frac{\tilde{s}^0_{i,k} I^{t,0}_{i,k}}{\sum_\ell \tilde{s}^0_{i,\ell} I^{t,0}_{i,\ell}}$$

et, comme précédemment, $\tilde{s}^0_{i\ell} = \frac{s^0_{i\ell}}{s^0_i}$.
Puis, la seconde option évoquée *supra* fait intervenir l'équivalent de la relation (II.13) écrite directement au deuxième niveau de partition du champ de l'indice :

$$\frac{\Delta I^{t,0}}{I^{t,0}} = \sum_{i,k} \omega_{i,k} \frac{\Delta I^{t,0}_{i,k}}{I^{t,0}_{i,k}} \tag{II.16}$$

avec

$$\omega_{i,k} = \frac{s^0_{i,k} I^{t,0}_{i,k}}{\sum_{j,\ell} s^0_{j,\ell} I^{t,0}_{j,\ell}}$$

Nous allons donc montrer que

$$\omega_{i,k} = \omega_i \, \tilde{\omega}_{i,k}$$

Pour cela, partons du terme de droite. En vertu de l'équation d'agrégation (II.12) appliquée au premier niveau (classe i) :

$$I_i^{t,0} = \sum_\ell \tilde{s}^0_{i,\ell} I^{t,0}_{i,\ell}$$

donc

$$\begin{aligned}
\omega_i \, \tilde{\omega}_{i,k} &= \frac{s_i^0 I_i^{t,0}}{\sum_j s_j^0 I_j^{t,0}} \times \frac{\tilde{s}^0_{i,k} I^{t,0}_{i,k}}{\sum_\ell \tilde{s}^0_{i,\ell} I^{t,0}_{i,\ell}} \\
&= \frac{s_i^0 \tilde{s}^0_{i,k} I^{t,0}_{i,k}}{\sum_j s_j^0 I_j^{t,0}} \\
&= \frac{s^0_{i,k} I^{t,0}_{i,k}}{\sum_j s_j^0 I_j^{t,0}} = \omega_{i,k}
\end{aligned}$$

II.5. Les indices de Divisia

L'indice de Divisia est une sorte de curiosité mathématique qui permet élégamment de faire le pont entre la théorie des indices et le partage volume-prix en mettant l'accent sur le grain temporel d'expression des indices. Ce sujet a connu des développements théoriques importants (Viglino 2000), même si les applications qu'en font les instituts nationaux de statistiques dans leur pratique quotidienne des indices de prix restent limitées.

Dans ce paragraphe, on travaille sur un ensemble de n biens repérés par un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considérons la dépense :

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) p_i(t)$$

La dépense évolue car les quantités évoluent, de même que les prix. Il peut être intéressant d'examiner la croissance infinitésimale que connaît la dépense lorsque le temps t est modifié de manière infinitésimale en $t + dt$. Si on note $\dot{D}(t)$ la dérivée de $D(t)$ par rapport à t, nous avons :

$$\dot{D}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(q_i(t) \dot{p}_i(t) + \dot{q}_i(t) p_i(t) \right)$$

Il en découle que :

$$\frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(t) p_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} q_j(t) p_j(t)} \times \left(\frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)} + \frac{\dot{q}_i(t)}{q_i(t)} \right)$$

Puis, si on intègre l'expression précédente sur $[0, T]$, on a [6] :

$$\frac{D(T)}{D(0)} = \underbrace{\exp\left[\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(t) p_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} q_j(t) p_j(t)} \times \frac{\dot{p}_i(t)}{p_i(t)} dt \right]}_{\text{indice de prix}} \times \underbrace{\exp\left[\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(t) p_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} q_j(t) p_j(t)} \times \frac{\dot{q}_i(t)}{q_i(t)} dt \right]}_{\text{indice de quantité}}$$

Ainsi, de manière infinitésimale, la croissance de la dépense peut se décomposer en produit d'un indice de prix et d'un indice de quantité (volume).

Dans le cas général, ces intégrales dépendent du « chemin parcouru », ce qui signifie que l'évolution entre plusieurs instants successifs n'est en général pas égale à l'évolution globale, sauf à connaître en tous points (i.e. $\forall t$) les valeurs des fonctions $q_i(t)$ et $p_i(t)$ ($\forall i$). Cette dépendance au « chemin parcouru » a aussi pour conséquence que si le vecteur de (prix,quantités) revient à son niveau initial, les indices de prix ou de quantités ne reviennent pas nécessairement au niveau initial puisque le niveau dépend du chemin utilisé pour y

6. Cette décomposition est fondamentale car elle relie le seul concept parfaitement établi (car évidemment mesurable), la dépense, à des concepts qui relèvent de conventions et dont la définition peut se discuter, les indices de volume et de prix. Berthier (2013) traite en détail du sujet du partage volume-prix. Voir également à ce propos les manuels de Comptabilité nationale (Valoni 2002, Lequiller & Blades 2004).

parvenir. Hulten (1973) examine les conditions sous lesquelles l'indice de Divisia ne dépend pas du chemin parcouru. Elles sont assez restrictives et ne sont donc pas de beaucoup d'utilité pour construire un concept d'indice de prix satisfaisant.

Une des conséquences de ces réflexions sur les indices de Divisia pourrait être de préconiser la détermination d'indice de prix à haute fréquence en suivant de manière très précise l'évolution des prix et des quantités vendues. Ceci revient en particulier à calculer des indices de Laspeyres avec chaînage à haute fréquence. Même si l'idée peut paraître à première vue séduisante, cette approche se heurte à la difficulté de travailler sur des produits dont les ventes fluctuent grandement, parfois de manière saisonnière et surtout avec des trajectoires de prix et de quantités le plus souvent *anti-corrélées*. Cette dernière caractéristique des évolutions de prix et de quantités doit nous amener à reconsidérer la question de chaînage à l'aune des phénomènes numériques – très critiques – qui peuvent survenir dans de telles situations. C'est ce que nous examinons à la section suivante.

II.6. Indice de Laspeyres et biais de chaînage

Pour une année A donnée, les indices des pays européens sont construits en deux étapes :

1. calcul d'un indice de Laspeyres à panier fixe décembre de l'année $A-1$ pour tous les mois de l'année A ;
2. chaînage annuel.

Cette pratique est désormais bien établie et donne satisfaction. Elle résulte d'un compromis entre la nécessite de travailler avec un panier dont la structure est à jour par rapport à la consommation des ménages (ce qui milite pour intégrer des pondérations de calcul aussi récentes que possible) et l'objectif de ne pas générer des biais de chaînage[7] qui peuvent survenir lorsqu'une corrélation statistique existe entre les prix utilisés dans le calcul et les pondérations du panier, laquelle peut engendrer des dérives de l'indice en cas de chaînage. Chauvet-Peyrard (2013) propose une présentation détaillée de ce phénomène. Les principaux aspects de ce problème sont résumés ci-après.

Considérons un indice de Laspeyres classique défini par :

$$I_{\mathscr{L}}^{t,t-1} = \frac{\sum_i p_i^t q_i^{t-1}}{\sum_i p_i^{t-1} q_i^{t-1}} \tag{II.17}$$

et posons, pour l'exercice que

$$p_i^t = p_i^{t-1}(1+\pi^t) + \varepsilon_i^t$$

7. *chain drift* en anglais.

où π^t est le taux d'inflation instantané au temps t. C'est donc, *de facto*, π^t que l'on cherche à déterminer par le calcul d'indice. Les p_i^t, q_i^t, π^t, ε_i^t sont des variables aléatoires. On supposera ici que [8] $\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t) = 0$. Avec ces notations, on a :

$$I_{\mathscr{L}}^{t,t-1} = 1 + \pi^t + \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^t q_i^{t-1}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i^{t-1} p_i^{t-1}}$$

Moyennant quoi,

$$I_{\mathscr{L}}^{t,t-1} \xrightarrow{\text{prob}} 1 + \pi^t + \frac{\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})}{\mathbb{E}_\circ(p_i^{t-1} q_i^{t-1})} \tag{II.18}$$

Dans cette dernière expression, le dénominateur du terme de droite correspond à la dépense moyenne par produit à l'instant $t-1$.

Cette dernière expression montre que s'il existe une corrélation statistique en coupe entre l'aléa de prix ε_i^t et les quantités retardées q_i^{t-1}, alors celle-ci peut engendrer un biais d'indice par rapport à la quantité π^t que l'on cherche à déterminer par l'indice. Si en outre ce biais concernant $I_{\mathscr{L}}^{t,t-1}$ se reproduit dans le même sens quel que soit t, alors l'indice chaîné,

$$I_{\mathscr{L}}^{t,0} = \prod_{\tau=1}^{t} I_{\mathscr{L}}^{\tau,\tau-1}$$

dérive progressivement, et ceci même lorsque les prix ne comportent pas d'évolution tendancielle significative.

Avec ce modèle, on peut aisément rendre compte de cas critiques potentiels. Un cas particulièrement emblématique, connu sous le nom de « bouncing de Schultz [9] » peut survenir lorsque les prix oscillent autour d'une valeur moyenne. Historiquement, cet exemple a été introduit pour montrer que les indices calculés comme moyenne arithmétique (c'est-à-dire pour lesquels les poids des produits sont fixés en valeur) de rapports de prix sont sujets à des problèmes de cette nature.
Pour bien comprendre le phénomène, définissons pour cela l'indice sous forme de moyenne arithmétique de rapports de prix [10] (moyenne d'évolution) :

$$I_{\mathscr{M}a}^{t,t-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^t}{p_i^{t-1}}$$

8. La notation $\mathbb{E}_\circ$ désigne l'espérance calculée en coupe sur l'ensemble des produits composant le panier, ces produits étant supposés nombreux.

9. Voir Schultz (1994)

10. Cette formule d'indice est intéressante car historiquement, elle a été beaucoup utilisée (Malinvaud 1956) avant d'être finalement abandonnée, précisément à cause des problèmes numériques dont elle souffre. Intuitivement, il était en effet logique de poser comme principe premier qu'un indice de prix visant à refléter une évolution moyenne des prix soit construit comme une moyenne des évolutions des prix. Mais les intuitions sont parfois mauvaises conseillères. . .

On peut noter que cet indice s'écrit aussi sous forme d'indice de Laspeyres. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^t}{p_i^{t-1}} &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}p_j^{t-1}\right)\times p_i^t}{\displaystyle n\prod_{i=1}^{n}p_i^{t-1}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i}\left(\prod_{j\neq i}p_j^{t-1}\right)\times p_i^t}{\displaystyle\sum_{i}\left(\prod_{j\neq i}p_j^{t-1}\right)\times p_i^{t-1}}
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à l'indice de Laspeyres défini par la relation (II.17) où :

$$q_i^{t-1} \equiv \prod_{j\neq i} p_j^{t-1}$$

Ainsi, l'usage d'un indice sous forme de moyenne arithmétique est un cas particulier d'usage d'un indice de Laspeyres dans lequel les quantités dépendent des prix des autres produits. Prenons un exemple avec deux biens (1 et 2) dont les prix oscillent alternativement sans inflation (i.e. $\pi^t = 0$). Calculons un indice en moyenne simple de rapports de prix et chaînons cet indice. Les résultats sont indiqués à la table II.1. Outre l'indice en moyenne arithmétique, figure également dans la table l'indice de Laspeyres à quantités unitaires. Les indices sont chaînés aux différentes périodes d'observation.

On constate une dérive de l'indice en moyenne arithmétique. Cette dérive est la traduction directe du phénomène de « bouncing » évoqué *supra* dans lequel les prix oscillent et les aléas de prix contemporains sont positivement corrélés aux aléas de quantités retardés. On peut remarquer que l'indice de Laspeyres à quantités unitaires n'oscille pas. Mais ceci est finalement lié au caractère très particulier des quantités, ainsi que l'indique le résultat obtenu pour l'indice en moyenne simple de rapports de prix qui correspond au résultat que l'on obtiendrait pour un indice de Laspeyres fondé sur les quantités indiquées en partie inférieure du tableau II.1.

Un autre exemple, caractéristique d'une situation qui survient couramment : l'association d'un produit dont les prix et les quantités sont régulières dans le temps, à un produit dont les ventes sont saisonnières (ici toutes les deux périodes). On peut penser au schéma des soldes dans lesquelles les prix sont bas et les ventes élevées. On peut aussi penser au cas inverse où les prix des produits montent lorsque la demande est forte. Quoiqu'il en soit, $\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})$ n'est pas symétrique à la hausse où à la baisse : en effet, si les prix oscillent

TABLE II.1 – Exemple d'oscillations avec valeurs fixées

périodes (t)	0	1	2	3	4	5
p_1^t	10	20	10	20	10	20
p_2^t	20	10	20	10	20	10
$I_{\mathscr{M}a}$	1	1,25	1,56	1,95	2,44	3,05
$I_{\mathscr{L}}$	1	1	1	1	1	1
q_1^t		10	20	10	20	10
q_2^t		20	10	20	10	20
ε_1^t		10	-10	10	-10	10
ε_2^t		-10	10	-10	10	-10
$\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})$		100	100	100	100	100

Note : les indices sont des indices chaînés. L'indice de Laspeyres est calculé avec des quantités unitaires. L'indice $I_{\mathscr{M}a}$ est calculé en moyenne simple de rapports de prix. Ce dernier correspond à un indice de Laspeyres associé aux quantités indiquées aux deux premières lignes de la partie inférieure du tableau.

de même que les quantités, $|\varepsilon_i^t|$ correspond à la différence de prix entre les deux périodes, tandis que q_i^{t-1} joue comme un multiplicateur prenant deux valeurs. Ainsi, ε_i^t prend lui-aussi deux valeurs différentes en valeurs absolues et de signes opposés. C'est précisément cette dissymétrie hausse/baisse qui entraîne la dérive. Les tableaux II.2 et II.3 montrent deux cas d'oscillations avec une dérive de l'indice de Laspeyres, positive pour le premier et négative pour le second. Dans les cas présentés, la dérive positive (table II.2) survient dans le cas où les prix hauts s'accompagnent de quantités basses ; la dérive négative (table II.3) survient lorsque les prix hauts s'accompagnent de quantités élevées.

Il est possible de traiter l'effet d'oscillation de manière totalement analytique dans le cas de deux produits. Pour cela, on considère donc deux produits (1) et (2). Pendant toute la période considérée, le bien (1) est consommé en quantités q_1 au prix p_1. Ces deux nombres ne varient pas. Le prix du bien (2) oscille entre les valeurs $\overline{p}$ et $\underline{p}$ avec $\overline{p} > \underline{p}$. Les quantités consommées de bien (2) oscillent entre $\overline{q}$ et $\underline{q}$ respectivement associées aux périodes où le prix du bien (2) vaut $\overline{p}$ et celles où le prix du bien (2) vaut $\underline{p}$. On ne sait rien *a priori* de la position relative de $\overline{q}$ et $\underline{q}$.
L'indice de Laspeyres basé sur la période immédiatement précédente prend deux valeurs :

- $\overline{I}_{\mathscr{L}} = \dfrac{p_1 q_1 + \overline{p}\underline{q}}{p_1 q_1 + \underline{p}\underline{q}}$
- $\underline{I}_{\mathscr{L}} = \dfrac{p_1 q_1 + \underline{p}\overline{q}}{p_1 q_1 + \overline{p}\overline{q}}$

TABLE II.2 – Premier exemple d'oscillations avec variations de valeurs : dérive positive de l'indice de Laspeyres

périodes (t)	0	1	2	3	4	5
p_1^t	2	2	2	2	2	2
p_2^t	10	5	10	5	10	5
$I_{\mathscr{L}}$	1	0,83	1,30	1,08	1,68	1,40
q_1^t	10	10	10	10	10	10
q_2^t	1	5	1	5	1	5
ε_1^t		0	0	0	0	0
ε_2^t		-5	5	-5	5	-5
$\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})$		-5	25	-5	25	-5
$\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})/\mathbb{E}_\circ(p_i^{t-1} q_i^{t-1})$		-0,17	0,56	-0,17	0,56	-0,17

Note : les indices sont des indices chaînés. L'indice de Laspeyres est calculé avec les quantités indiquées aux deux premières lignes de la partie inférieure du tableau.

TABLE II.3 – Deuxième exemple d'oscillations avec variations de valeurs : dérive négative de l'indice de Laspeyres

périodes (t)	0	1	2	3	4	5
p_1^t	2	2	2	2	2	2
p_2^t	1	3	1	3	1	3
$I_{\mathscr{L}}$	1	1,10	0,66	0,72	0,43	0,47
q_1^t	10	10	10	10	10	10
q_2^t	1	10	1	10	1	10
ε_1^t		0	0	0	0	0
ε_2^t		2	-2	2	-2	2
$\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})$		2	-20	2	-20	2
$\mathbb{E}_\circ(\varepsilon_i^t q_i^{t-1})/\mathbb{E}_\circ(p_i^{t-1} q_i^{t-1})$		0,1	-0,4	0,1	-0,4	0,1

Note : les indices sont des indices chaînés. L'indice de Laspeyres est calculé avec les quantités indiquées aux deux premières lignes de la partie inférieure du tableau.

L'indice chaîné à la période T apparaît donc comme une puissance du produit $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}}$, à une constante multiplicative près qui apparaît lorsque T est impair. Autrement dit, l'indice chaîné va dériver au rythme du réel $\left(\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}}\right)^{T/2}$. Dans tous les cas où $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} \neq 1$, l'indice diverge effectivement. Cet indice chainé diverge à la baisse si $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} < 1$. Il diverge à la hausse si $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} > 1$.

Calculons $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} - 1$.

$$\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} - 1 = \frac{(p_1q_1 + \overline{p}\,\underline{q})(p_1q_1 + \underline{p}\,\underline{q}) - (p_1q_1 + \underline{p}\,\underline{q})(p_1q_1 + \overline{p}\,\overline{q})}{(p_1q_1 + \underline{p}\,\underline{q})(p_1q_1 + \overline{p}\,\overline{q})}$$

est du signe du numérateur N. En développant et simplifiant son expression, on observe que :

$$N = p_1q_1(\overline{p} - \underline{p})(\underline{q} - \overline{q})$$

Ainsi, comme $\overline{p} > \underline{p}$, alors N est du signe de $\underline{q} - \overline{q}$.

Si les prix élevés sont associés à des quantités basses et *vice-versa*, alors $\underline{q} - \overline{q} > 0$ et $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} - 1 > 0$. Dans ce cas, l'indice chaîné dérive en augmentant indéfiniment.

A l'inverse, si les prix élevés sont associés à des quantités élevées et *vice-versa*, alors $\overline{q} > \underline{q}$ et $\overline{I}_{\mathscr{L}}\underline{I}_{\mathscr{L}} - 1 < 0$. Dans ce cas, l'indice chaîné dérive en diminuant indéfiniment (convergence asymptotique vers 0).

Ce résultat appelle quelques remarques :

- Si $\underline{q} = \overline{q}$ (i.e. il n'y a pas d'oscillations dans les quantités), alors il n'y a pas d'oscillation de l'indice chaîné.
- Une oscillation des quantités sans oscillation de prix n'engendre pas d'oscillation de l'indice chaîné.
- Le cas de la table II.2 correspond à $(\overline{p}, \underline{p}, \overline{q}, \underline{q}) = (10, 5, 1, 5)$. Les prix hauts sont associés aux quantités basses donc l'indice diverge vers $+\infty$.
- Le cas de la table II.3 correspond à $(\overline{p}, \underline{p}, \overline{q}, \underline{q}) = (3, 1, 10, 1)$. Les prix hauts sont associés aux quantités hautes, donc l'indice diverge vers 0.

CHAPITRE III

LES MICROINDICES

On désigne par *microindices* les formules permettant de passer d'observations élémentaires de prix à des indices. Comme évoqué dans le chapitre précédent, la mise en œuvre de ces formules constitue l'étape initiale du calcul d'indice. En effet, un indice d'ensemble qui rend compte de l'inflation dans un champ (large) de l'économie s'appuie d'une part sur les calculs d'indices élémentaires se rapportant à des cellules de consommation (par exemple le marché d'un certain type de produit dans une certaine zone géographique) et, d'autre part, sur l'agrégation des indices élémentaires précédents. Ce chapitre étudie les propriétés calculatoires des microindices et leurs conséquences pratiques.

III.1. Quelques éléments sur la théorie axiomatique des indices

Bien que la construction d'indices de prix relève généralement d'un ensemble de conventions relativement *ad hoc*, il est possible de rationaliser les propriétés souhaitables pour un indice de prix. C'est l'objet de la théorie axiomatique qui a pris corps à partir de l'analyse de ces propriétés souhaitables. La plupart de ces propriétés sont liées aux propriétés élémentaires des prix. Par exemple, si les prix retrouvent, pour tous les articles suivis, le niveau qu'ils avaient lors d'une période initiale, l'indice *devrait* retrouver lui-même le niveau qu'il avait lors de cette période initiale. Les principales propriétés sont examinées dans différents textes. On peut citer en particulier Eichhorn & Voeller (1976) qui posent les fondements modernes de cette théorie, reprise par Diewert (1995) ou, par exemple, dans le manuel international sur les prix à la consommation (ILO, IMF, OECD, UNECE, Eurostat & The World Bank 2004).

III.1.1. Définition des indices de prix

L'approche retenue ici est celle due à Eichhorn & Voeller (1976) qui tentent de préciser un jeu minimal de propriétés et examinent systématiquement le caractère indépendant ou non des propriétés retenues pour définir un indice de prix. Si cette présentation peut paraître assez formelle, elle nous semble néanmoins préférable à l'approche adoptée dans (ILO et al. 2004) qui consiste à lister un jeu de 20 propriétés et à étudier quels indices vérifient tel ou tel jeu de propriétés, sans prendre soin d'étudier les recoupements éventuels de ces propriétés. Cet inventaire aboutit à la conclusion que le seul l'indice de Fisher vérifie l'ensemble des propriétés examinées. Cependant, certaines des propriétés retenues sont finalement discutables, ne serait-ce que parce qu'elles ne sont pas vérifiées dans le cadre alternatif de la théorie du consommateur (voir chapitres IV et V) et d'autres, pourtant justifiées, n'apparaissent pas dans l'inventaire. Au final, il nous semble qu'une approche progressive est pertinente. C'est cette approche que nous retenons ici [1].

Eichhorn & Voeller (1976) proposent de définir un indice de prix de la manière suivante.

1. C'est aussi l'approche retenue par (Balk 1995).

Définition III.1. *Un indice de prix est une fonction $\mathcal{P}$ opérant sur un quadruplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (n représentant la taille du panier de biens auquel se rapporte l'indice de prix)*

$$\left| \begin{array}{lccc} \mathcal{P} : & \mathbb{R}^{4n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{array} \right.$$

et vérifiant les axiomes *suivants :*

(i) **Monotonie** *: la fonction $\mathcal{P}$ est strictement croissante par rapport à $\mathbf{p}$ et strictement décroissante par rapport à $\mathbf{p}^0$:*
- $\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) > \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}') \Leftrightarrow \mathbf{p} > \mathbf{p}'$ (2)
- $\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) < \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^{0\prime}, \mathbf{q}, \mathbf{p}') \Leftrightarrow \mathbf{p}^0 > \mathbf{p}^{0\prime}$

(ii) **Homogénéité linéaire** *: quel que soit le réel strictement positif λ,*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = \lambda\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

(iii) **Identité**

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}^0) = 1$$

(iv) **Dimensionnalité** *: quel que soit le réel strictement positif λ,*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \lambda\mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

(v) **Commensurabilité** *: quel que soit le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de réels strictement positifs,*

$$\mathcal{P}(\frac{q_1^0}{\lambda_1}, \ldots, \frac{q_n^0}{\lambda_n}, \lambda_1 p_1^0, \ldots, \lambda_n p_n^0, \frac{q_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{q_n}{\lambda_n}, \lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_n p_n) = \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Ces différentes propriétés se justifient assez naturellement et sont donc considérée par Eichhorn & Voeller (1976) comme les axiomes nécessaires à respecter pour un indice de prix destiné à mesurer un changement dans un vecteur de prix entre deux périodes différentes. Ces auteurs montrent que les propriétés (i) à (v) précédentes sont *indépendantes* dans le sens où il est toujours possible de trouver une fonction $\mathcal{P}$ vérifiant 4 propriétés parmi les 5 et ne vérifiant pas la propriété résiduelle.

Ces propriétés sont effectivement assez naturelles.

2. Cette écriture indique que quelle que soit la composante i considérée des vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$, $p_i \geqslant p'_i$ et pour au moins une des composante, l'inégalité stricte est vérifiée.

La propriété de monotonie (i) indique que si toutes les composantes d'un vecteur de prix évoluent dans un sens donné, alors l'indice fait de même s'il s'agit du vecteur de prix contemporain et dans le sens opposé s'il s'agit du vecteur de prix de base. La propriété d'uniformité linéaire (ii) indique que si tous les prix sont multipliés par un facteur uniforme sans autre modification, alors l'indice augmente précisément de ce même facteur. La propriété d'identité (iii) indique que si les prix ne changent pas entre les deux états de l'économie alors l'indice vaut 1 et ce, indépendamment de l'évolution que connaissent les quantités entre les deux états. La propriété de dimensionnalité (iv) indique qu'un changement d'unité monétaire (les prix sont, aux deux états, multipliés par un même facteur de conversion) est sans effet sur l'indice. Enfin la propriété de commensurabilité (v) indique que si le vecteur des prix est multiplié aux deux périodes par un jeu constant de paramètres tandis que les quantités sont divisés par les mêmes facteurs, alors l'indice est inchangé. Cette situation survient lorsque l'unité de mesure de volume ou de poids d'un ou de plusieurs produit composant le panier est modifiée. Cette propriété impose donc que l'indice des prix soit neutre au choix des unités de volume ou de poids adoptées pour chacun des produits élémentaires composant le panier suivi.

Cette définition limite assez sensiblement le champ des possibles pour les formules d'indices de prix. Ainsi, par exemple, la fonction :

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}^0 . \mathbf{p}^1}{\mathbf{q}^0 . \mathbf{p}^0}} \tag{III.1}$$

n'est pas un indice de prix dans la mesure où cette fonction ne vérifie pas la propriété (ii) d'homogénéité linaire.

De cette définition découlent des propriétés vérifiées par les indices de prix.

Propriété III.1. *Un indice de prix $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^{4n} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :*

A. **Propriété de proportionnalité** *: pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}^0) = \lambda$$

B. **Propriété d'homogénéité de degré moins un** *: pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \lambda\mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

C. **Propriété de la valeur moyenne** *: $\mathcal{P}$ vérifie l'inégalité suivante*

$$\min\left\{\frac{p_1^1}{p_1^0}, \dots, \frac{p_n^1}{p_n^0}\right\} \leqslant \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) \leqslant \max\left\{\frac{p_1^1}{p_1^0}, \dots, \frac{p_n^1}{p_n^0}\right\}$$

La propriété (A) découle de l'axiome (iv) où l'on prend $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}^0$ et de l'application subséquente de l'axiome (iii). La propriété (B) découle de l'axiome (iv) appliqué au vecteur $(\mathbf{q}^0, \lambda\mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \lambda \times \left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{p}\right])$, puis de l'axiome (ii) appliqué au résultat.
La propriété (C) se démontre de la manière suivante : notons $\alpha = \min_i \left\{\frac{p_i^1}{p_i^0}\right\}$ et $\beta = \max_i \left\{\frac{p_i^1}{p_i^0}\right\}$. Par construction (voir note de bas de page N° 2 pour une définition des inégalités vectorielles),

$$\alpha\mathbf{p}^0 \leqslant \mathbf{p}^1 \leqslant \beta\mathbf{p}^0$$

Donc à l'aide de l'axiome (i) :

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \alpha\mathbf{p}^0) \leqslant \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) \leqslant \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \beta\mathbf{p}^0)$$

Or, de l'axiome (ii) il vient : $\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \alpha\mathbf{p}^0) = \alpha\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^0)$ et $\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \beta\mathbf{p}^0) = \beta\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^0)$. Enfin, l'axiome (iii) implique que $\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^0) = 1$. Finalement, l'inégalité précédente devient :

$$\alpha \leqslant \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) \leqslant \beta$$

ce qui correspond au résultat attendu.

D'autres propriétés sont parfois examinées pour mieux préciser le comportement des indices. A la suite des travaux de Fisher au début du vingtième siècle, ces propriétés sont appelées « tests » dans la littérature. Ces tests sont généralement inspirés du comportement du prix d'un bien unique. Tout d'abord il est utile de remarquer qu'on peut déduire, d'un indice de prix, un indice de quantité associé en inversant les vecteurs de prix et de quantité. Ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition III.2. *Soit* $\mathcal{P}\ :\ (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ *un indice de prix de* $\mathbb{R}^{4n}$. *On appelle indice de quantité associé à* $\mathcal{P}$ *la fonction :*

$$\begin{array}{|lccc} \mathcal{Q}_{\mathcal{P}} : & \mathbb{R}^{4n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{array}$$

En effet, si au lieu de fixer les prix, on fixe les quantités et que réciproquement, on fait jouer aux prix le rôle antérieurement joué par les quantités, on construit de fait un indice de quantités.
Parmi les tests de Fisher importants, on peut citer le suivant.

Test III.1. *Soit* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{R}^{4n} \longrightarrow \mathbb{R}$, *un indice de prix et* $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$ *son indice de quantité associé. On définit les deux propriétés suivantes, appelées* tests.

a. **Test d'inversion des facteurs** – $\mathcal{P}$ *vérifie le test d'inversion des facteurs lorsque :*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})\ \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{q}}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^0}$$

b. **Test de circularité** – $\mathcal{P}$ *vérifie le test de circularité lorsque :*

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)\ \mathcal{P}(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1, \mathbf{q}^2, \mathbf{p}^2) = \mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^2, \mathbf{p}^2)$$

Eichhorn & Voeller (1976) montrent qu'il n'existe pas d'indice des prix vérifiant à la fois les tests (a) et (b). En revanche, certains indices de prix vérifient l'un ou l'autre de ces tests. Ceci est indiqué à la table III.1.
Ces auteurs montrent également que la seule fonction de $\mathbb{R}^{4n}$ qui vérifie les deux tests (a) et (b), ainsi que l'axiome de commensurabilité (v) est la suivante :

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}^1.\mathbf{p}^1}{\mathbf{q}^0.\mathbf{p}^0}} \tag{III.2}$$

Cette fonction, racine carrée d'un rapport de dépenses, n'est évidemment pas un indice de prix car elle ne vérifie pas l'axiome (ii) d'homogénéité linéaire, partie intégrante de la définition d'un indice de prix dans l'approche retenue ici.

III.1.2. Quelques indices de prix usuels

Dans ce paragraphe, on examine quelques indices de prix classiques, dont naturellement ceux pratiqués dans l'IPC français. Ces éléments sont pour l'essentiel repris du document (ILO et al. 2004).
On note que l'indice de Fisher est le seul qui dépend effectivement des quantités des deux périodes considérées et qui vérifie un des tests de Fisher, en l'occurrence le test d'inversion des facteurs.

Il faut finalement retenir que même si l'indice de Fisher – appelé idéal dans la plupart des textes suite à la description qu'en a faite Fisher au début du vingtième siècle – vérifie un peu plus de propriétés que les autres indices de prix, il n'existe pas d'indice fondé sur des pures propriétés mathématiques qui vérifierait toutes celles qui sont désirables pour un indice de prix. De ce point de vue, Balk (1995) arrive exactement à la même conclusion : « *Fisher concluded that his ideal price index is "probably the king of all index number formulae." This is certainly true with respect to its score of characterization theorems. However, to be honnest we should observe that every characterization of [the fisher Index] contains at least one functional equation wich is not self-evident.* » On ne saurait dire les choses plus clairement... Il conclut en mentionnant la pertinence des indices de Laspeyres et de Paasche lorsqu'on considère la cohérence des formules d'agrégation qui découlent de leur usage. Il s'agit là d'une autre approche qui complète l'approche axiomatique.

La table III.1 présente 16 indices de prix élémentaires utilisés plus ou moins couramment dans les indices de prix calculés par les différents pays. Le fondement de certains d'entre eux est examiné aux chapitres IV et V. C'est le cas notamment des indices de Fisher, Törnqvist, Lloyd-Moulton, Laspeyres géométrique, Jevons qui trouvent leur justification dans la théorie du consommateur. D'autres indices résultent de considérations *ad hoc* comme les indices de Laspeyres et de Paasche tels qu'ils ont été introduits au chapitre II. C'est aussi le cas de l'indice de Carli.
D'autres indices sont des modulations des indices précédents destinées à prendre en compte une particularité du calcul. C'est le cas des indices de Lowe, Young, Vartia qui permettent d'expliciter le rôle distinct des pondérations et des prix de base. D'autres enfin constituent des curiosités mathématiques peu utilisées en pratique.
L'indice des prix à la consommation français (IPC) s'appuie sur les formules d'indice de Dutot, Young, Jevons, Laspeyres, Laspeyres géométrique selon les biens et services considérés. Ces formules sont celles préconisées dans le règlement européen qui fixe les spécifications de l'indice des prix européen harmo-

TABLE III.1 – Quelques indices de prix usuels

Nom de l'indice	$\mathcal{P}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0, \mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$	Tests vérifiés
Lowe	$\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^b}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^b}$	(b)
Young	$\sum \pi_i^b \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)$	
Young réciproque	$\left[\sum \pi_i^b \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{-1}\right]^{-1}$	
Carli	$\frac{1}{n} \sum \frac{p_i^1}{p_i^0}$	
Dutot	$\frac{\sum p_i^1}{\sum p_i^0}$	(b)
Jevons	$\prod \left[\frac{p_i^1}{p_i^0}\right]^{1/n}$	(b)
Laspeyres	$\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^0}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^0}$	
Paasche	$\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^1}$	
Laspeyres géométrique	$\prod \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\pi_i^0}$	
Drobish	$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^0}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^0} + \frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^1}\right]$	
Marshall-Edgeworth	$\frac{\sum p_i^1(q_i^1+q_i^0)}{\sum p_i^0(q_i^1+q_i^0)}$	
Walsh	$\frac{\sum p_i^1 \sqrt{q_i^1 q_i^0}}{\sum p_i^0 \sqrt{q_i^1 q_i^0}}$	
Törnqvist	$\prod \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\frac{\pi_i^1+\pi_i^0}{2}}$	
Fisher	$\sqrt{\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^0}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^0} \times \frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0.\mathbf{q}^1}}$	(a)
Vartia	$\prod \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\alpha_i(\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\pi}^1)}$	
Lloyd-Moulton	$\left\{\sum \pi_i^0 \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{1-\varepsilon}\right\}^{1/(1-\varepsilon)}$; $\varepsilon > 0$	

Note : Toutes les fonctions recensées dans ce tableau sont des indices au sens de la définition III.1. La colonne *Tests vérifiés* se réfère aux Tests III.1. Lorsqu'il est fait référence à des quantités $\mathbf{q}^b$, cela indique que les quantités retenues ne sont pas nécessairement coïncidentes avec les quantités de la période 0 de référence (ou base). C'est le cas, par exemple de l'indice de Lowe ou de Young. n désigne le nombre de biens du panier suivi. π_i^k désigne le poids du bien i dans la dépense à la période k. Explicitement, $\pi_i^k = \frac{p_i^k q_i^k}{\mathbf{p}^k.\mathbf{q}^k}$. Avec ces notations, $\sum \pi_i^k = 1$. Pour l'indice de Vartia, $\alpha_i(\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\pi}^1) = \frac{(\pi_i^1 - \pi_i^0)/(\ln \pi_i^1 - \ln \pi_i^0)}{\sum (\pi_j^1 - \pi_j^0)/(\ln \pi_j^1 - \ln \pi_j^0)}$. On note que l'expression $(\pi_i^1 - \pi_i^0)/(\ln \pi_i^1 - \ln \pi_i^0)$ a pour limite π_i^0 lorsque $\pi_i^1 \to \pi_i^0$. L'indice de Drobish est aussi connu sous le nom Drobish-Sidgwick-Bowley. L'indice de Törnqvist est aussi connu sous le nom de Törnqvist-Theil.

nisé [3] (IPCH).

III.2. Le calcul de prix moyens lorsque les dépenses sont connues

Dans cette section, on examine le calcul de prix moyens de produits. Ce sujet ne pose pas difficulté lorsqu'on dispose des quantités consommées pour chacun des produits. Cependant, en pratique, les prix moyens étant calculés en marge de calculs d'indices de Laspeyres où l'agrégation s'appuie sur des poids en valeur des produits (formule II.12 par exemple), le calcul de prix moyens obtenus par agrégation de prix observés se heurte à la difficulté de ne pas disposer de quantités pour pondérer les prix, mais de dépenses. Moyennant quoi, les formules d'agrégation doivent être adaptées. L'objet de cette section est donc de présenter les adaptations requises en ces circonstances.

On considère un type de bien i et on cherche à déterminer un prix moyen de ce bien :

$$\bar{P}_i(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k \in K_i} q_{ik}(0) p_{ik}(t)}{\displaystyle\sum_{k \in K_i} q_{ik}(0)} \tag{III.3}$$

Par rapport au calcul d'indice, une difficulté particulière survient liée au fait qu'on n'observe pas les quantités $q_{ik}(0)$ (ou un rapport de quantités), mais plutôt le poids du bien k dans la dépense associée au bien i en période 0 (i.e. $\frac{q_{ik}(0)p_{ik}(0)}{\sum_{k \in K_i} q_{ik}(0)p_{ik}(0)}$). Noter qu'avec les données de caisses, cette difficulté tombe puisqu'on observe directement les quantités vendues. Mais restons pour l'instant dans le cadre de l'hypothèse où les quantités sont inobservées.
La relation (III.3) s'écrit aussi :

$$\underbrace{\sum_{k \in K_i} q_{ik}(0)}_{Q_i(0)} \times \bar{P}_i(t) = \sum_{k \in K_i} q_{ik}(0) p_{ik}(t) \tag{III.4}$$

Cette expression fait apparaître la quantité totale de bien de type i achetée à l'instant 0 :

$$Q_i(0) = \sum_k q_{ik}(0) \tag{III.5}$$

Cette dernière relation peut être écrite à partir de données observées : les dépenses et les prix à la période de référence 0. La dépense totale est $D_i(0) =$

3. Règlement (UE) 2016/792 du Parlement Européen et du Conseil du 11 mai 2016 relatif aux indices des prix à la consommation harmonisés et à l'indice des prix des logements, et abrogeant le règlement (CE) no 2494/95 du Conseil.

$Q_i(0)\bar{P}_i(0)$ et la dépense particulière liée au bien k est $d_{ik}(0) = q_{ik}(0)p_{ik}(0)$. Avec ces notations, la relation (III.5) s'écrit :

$$\frac{D_i(0)}{\bar{P}_i(0)} = \sum_{k \in K_i} \frac{d_{ik}(0)}{p_{ik}(0)}$$

Avec les notations du paragraphe II.4., nous avons : $\omega_{ik} = \frac{d_{ik}(0)}{D_i(0)}$, donc

$$\frac{1}{\bar{P}_i(0)} = \sum_{k \in K_i} \frac{\omega_{ik}}{p_{ik}(0)} \tag{III.6}$$

Il en découle une relation pour le prix moyen à la date t conditionnellement à la structure de consommation (en dépense) de l'année de base [4] :

$$\frac{1}{\bar{P}_i(t)} = \sum_{k \in K_i} \frac{\omega_{ik}}{p_{ik}(t)} \tag{III.7}$$

Ces formules sont utilisées dans la chaîne de calcul de l'IPC pour le calcul des prix moyens de variétés (Jaluzot & Sillard 2015). Dans la relation (III.7), le prix moyen est issu d'une moyenne harmonique des prix élémentaires, pondérée par les dépenses.

III.3. Les indices de prix mensuels chaînés annuellement

La plupart des pays industrialisés publient des chiffres mensuels d'inflation. C'est le cas de la France et de l'ensemble des pays de l'Union européenne. Ces pays publient en outre des indices nationaux respectant des principes harmonisés fixés par règlementation européenne et transmettent des données nationales à la Commission européenne (Eurostat) permettant à cette dernière de calculer des indices agrégés au niveau de la zone euro et de l'Union.

L'indice des prix européen harmonisé IPCH est un indice de Laspeyres à base annuelle fixe-décembre de l'année précédente et chaîné annuellement.

Des micro-indices sont calculés pour le mois m de l'année A, une variété de produit i et une zone géographique [5] a. On note $I_{i,a}^{A,m}$ un tel indice. Il est calculé, à partir des prix d'articles correspondants, notés [6] $k \in \{1, \ldots, n_{i,a}\}$, par une formule de Dutot ou de Jevons selon ce que le pays décide d'adopter [7]. En

4. Formellement, lorsqu'on à affaire à un échantillon de produits, le terme de droite est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\bar{P}_i(t)}$, mais l'inverse est un estimateur biaisé de $\bar{P}_i(t)$. Une delta-méthode indique que pour toute variable aléatoire X, $\mathbb{E}(\frac{1}{X}) - \frac{1}{\mathbb{E}X} = \frac{1}{(\mathbb{E}X)^3}E(X - \mathbb{E}X)^2$, donc l'estimateur ainsi construit de $\bar{P}_i(t)$ surestime $\bar{P}_i(t)$ et ce, d'autant plus que l'estimateur de $\widehat{\frac{1}{\bar{P}_i(t)}}$ a une variance élevée. En d'autres termes, si cette variance est faible, le biais du prix moyen estimé ainsi est faible.

5. Par exemple, en France, une agglomération (unité urbaine).

6. $n_{i,a}$ est le nombre d'articles du panier IPC pour la variété i et la zone géographique a.

7. Les règlements européens donnent le choix entre l'une ou l'autre des deux formules.

France, les deux formules sont utilisées : la formule de Dutot pour les variétés de produits homogènes (les yaourts natures, par exemple) et la formule de Jevons pour les variétés hétérogènes (les machines à laver le linge, par exemple). Ainsi,

$$I_{i,a}^{A,m} = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{n_{i,a}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n_{i,a}} p_{k,i,a}^{A,m}\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{n_{i,a}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n_{i,a}} p_{k,i,a}^{A-1,12}\right) \\ \\ \boxed{\text{ou}} \\ \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n_{i,a}} \left(p_{k,i,a}^{A,m} \Big/ p_{k,i,a}^{A-1,12}\right)^{1/n_{i,a}} \end{array} \right.$$

où $p_{k,i,a}^{A,m}$ est le prix du produit k du micro-indice (i, a) observé au mois m de l'année A.

Lorsqu'un produit est manquant sur un mois, son prix est imputé à l'aide de son dernier prix normal (i.e. hors soldes et promotions) observé auquel on applique l'évolution moyenne de prix effectivement observée sur les produits de la même variété et de la même zone géographique. Lorsque le produit connaît une absence de plus de deux mois, il est remplacé par un autre produit avec, le cas échéant, un traitement effectué sur le prix destiné à conserver, pour le produit remplaçant, le niveau de qualité du produit remplacé (voir paragraphe IV.3.).

Le micro-indice est un indice-base décembre $A - 1$. Les micro-indices ainsi obtenus sont ensuite agrégés par agrégation de Laspeyres pour former l'indice de la cellule de consommation G :

$$I_G^{A,m} = \sum_{\forall (i,a) \in G} \pi_{i,a}^{A-1} \times I_{i,a}^{A,m}$$

où G est quelconque (par exemple, l'ensemble des variétés de l'alimentaire pour l'ensemble du territoire français), $\pi_{i,a}^{A-1}$ est le poids en dépense de consommation des ménages de l'ensemble (i, a), tel qu'observé (ou estimé [8]) sur l'ensemble de l'année $A - 1$. L'indice $I_G^{A,m}$ est un indice-base décembre $A - 1$, comme le sont les micro-indices qui le constituent.

Enfin, l'indice chaîné $\tilde{I}_G^{A,m}$ du groupe de consommation G est défini par les relations suivantes :

8. En pratique, pour l'IPC français, $\pi_{i,a}^{A-1}$ est estimé à partir des dépenses de consommation issues des Comptes nationaux provisoires $A - 2$, actualisées aux prix de décembre $A - 1$, conformément au règlement européens relatif à l'indice des prix à la consommation harmonisé (IPCH) européen (*op. cit.*).

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{I}_G^{A,m} & = & \tilde{I}_G^{A-1,12} \times I_G^{A,m} \\ \\ \tilde{I}_G^{0,m} & = & \left(\dfrac{1}{12}\displaystyle\sum_{m=1}^{12} I_G^{0,m}\right)^{-1} \times I_G^{0,m} \end{array}\right.$$

où l'année 0 désigne l'année de base. Par construction, la moyenne annuelle simple des 12 indices chaînés de l'année de base vaut 1. Les indices chaînés de l'année de base ne peuvent donc être déterminés qu'à l'issue de l'observation de l'indice-base décembre du douzième mois de cette année.

III.4. Les indices de prix pour des produits saisonniers

Dans la consommation des ménages, la consommation de certains produits est saisonnière. Qualitativement, deux types de saisonnalités coexistent :

- Certains produits ne sont pas en vente à certaines périodes, car ils ne sont plus produits ou simplement retirés de la vente dans les magasins. C'est le cas pour les fruits et légumes d'été lors de la saison hivernale, ou bien même des vêtements d'été en hiver et *vice-versa*.
- Certains produits ne sont pratiquement plus achetés par les consommateurs à certaines saisons. C'est le cas des chocolats de Pâques ou de Noël qui ne sont achetés qu'à ces périodes de l'année. C'est aussi le cas pour des conditionnements festifs qui ne sont écoulés que lors des périodes des fêtes de fin d'année, comme le saumon fumé en packaging d'une dizaine de tranches. On trouve aussi dans ce type d'articles des produits manufacturés ou biens durables, comme les articles de jardin qui sont vendus au printemps et à l'été, mais dont les ventes s'effondrent en hiver.

Quand on va dans le détail, les deux types de saisonnalité précédents ne sont pas strictement définis. Certains produits peuvent être en même temps soumis à saisonnalité ou non (le saumon fumé par exemple) ; ils peuvent être en même temps du premier type ou du second, par exemple si on considère que dans certaines formes de vente, les produits sont présents toute l'année tandis que dans d'autres, ils ne sont présents que de manière saisonnière. Ainsi, les articles de papeterie scolaire peuvent être vendus dans les supérettes en août-septembre et disparaître par la suite, tandis que ces articles sont vendus à l'année dans les hypermarchés ou les magasins spécialisés. Quoiqu'il en soit, les indices de prix doivent être adaptés à l'existence de ce type de produits.

L'approche par chaînage haute fréquence, consistant à déterminer des évolutions entre périodes très rapprochées sur la base des produits communs à deux périodes successives a été un temps prônée (Malinvaud 1950). Elle continue de l'être dans certains contextes bien particuliers, notamment liés aux données de caisses (Ivancic, Diewert & Fox 2011). Cependant, elle se heurte aux phénomènes déjà évoqués (cf. § II.5. et II.6.) de biais de chaînage, les quantités de produits consommées étant statistiquement très liées aux prix pratiqués. Les statisticiens des prix ont donc développé des méthodes spécifiques aux produits frais, dont la période de disponibilité est incertaine et les fluctuations de prix potentiellement très importantes, plutôt fondées sur des principes d'indice à base fixe ou annuelle, le biais de chaînage pouvant prendre des proportions extrêmes pour ce type de produits.

Cette section présente deux approches traditionnelles retenues dans les indices de prix à la consommation. La première était utilisée en France pour les produits frais dans l'IPC-base 1998. La seconde est celle prônée pour de tels produits dans les règlements européens portant sur l'indice des prix à la consommation harmonisé européen et utilisée dans l'IPC français-base 2015.

Signalons enfin, qu'en marge des considérations sur les formules de calcul, il faut aussi avoir en tête que la saisonnalité peut résulter du comportement du consommateur. Moyennant quoi, la forme retenue de l'indice destinée à prendre en compte la particularité de ces produits peut découler de ce constat. Par exemple, il est clair que les ventes d'habillement augmentent considérablement pendant les périodes de soldes, parce que les consommateurs peuvent et décident de différer leurs achats de ce type de produits sur des périodes où les prix sont moins élevés. Les consommateurs adoptent alors un comportement optimisateur. Ainsi, un indice dont le poids mensuel ne varie pas et ne tient pas compte des substitutions intertemporelles à l'œuvre ne rend qu'imparfaitement compte de l'évolution des prix. Pour plus d'éléments sur ces questions, le lecteur est invité à se reporter à Sillard & Wilner (2015).

III.4.1. Agrégation d'indices de Rothwell

Supposons ici que la consommation soit partitionnée en groupes (indicés i ci-après), l'indice k désignant un bien du groupe i.
L'indice de Rothwell (1958) du mois m de l'année courante t par rapport à l'année de base (0) s'écrit, au global :

$$I_{\mathscr{R}}^{m}(t) = \frac{\sum\limits_{i,k} q_{ik}^{m}(0)p_{ik}^{m}(t)}{\sum\limits_{i,k} q_{ik}^{m}(0)\bar{P}_0}$$

où

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i,k,m} q_{ik}^{m}(0)} \times \sum_{i,k,m} q_{ik}^{m}(0)p_{ik}^{m}$$

On définit aussi

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_i^m(0) & = & \sum_k q_{ik}^m(0) \\ Q^m(0) & = & \sum_{i,k} q_{ik}^m(0) = \sum_i Q_i^m(0) \end{array}\right.$$

Par construction

$$\begin{aligned} I_{\mathscr{R}}^m(t) &= \frac{1}{\bar{P}_0 Q^m(0)} \times \sum_i \left(\sum_k q_{ik}^m(0) p_{ik}^m(t) \right) \\ &= \frac{1}{\bar{P}_0 Q^m(0)} \times \sum_i Q_i^m(0) \bar{P}_i^m(t) \end{aligned}$$

où

$$\bar{P}_i^m = \frac{1}{\sum_k q_{ik}^m(0)} \times \sum_k q_{ik}^m(0) p_{ik}^m(t)$$

est le prix moyen du groupe i avec les pondérations en quantités de l'année de base. Calculer

$$I_{\mathscr{R}}^m(t) = \frac{1}{\bar{P}_0} \times \frac{1}{Q^m(0)} \times \sum_i Q_i^m(0) \bar{P}_i^m(t)$$

revient à estimer un prix moyen sur la partition de la consommation indicée sur i, les quantités étant données par les $Q_i^m(0)$, $Q^m(0)$ étant la somme des $Q_i^m(0)$.

Pour les mêmes raisons que dans le cas du calcul de prix moyens (§III.2.), un estimateur de $I_{\mathscr{R}}^m(t)$ est :

$$\hat{I_{\mathscr{R}}}^m(t) = \frac{1}{\bar{P}_0} \left\{ \sum_i \frac{\omega_i^m}{\bar{P}_i^m(t)} \right\}^{-1}$$

où $\omega_i^m = \frac{d_i^m(0)}{D^m(0)}$ est le poids du groupe i en dépense par rapport à la dépense totale $D^m(0)$ au mois m de l'année de base.
Finalement, $\hat{I_{\mathscr{R}}}^m(t)$ peut aussi s'écrire :

$$\hat{I_{\mathscr{R}}}^m(t) = \left\{ \sum_i \omega_i^m \left(\frac{\bar{P}_i^m(t)}{\bar{P}_0} \right)^{-1} \right\}^{-1} \tag{III.8}$$

Dans cette expression, ω_i^m est un poids en dépense du groupe i dans le mois m de l'année de base. Le poids est mensuel, c'est-à-dire que quel que soit m, $\sum_i \omega_i^m = 1$.
$\bar{P}_i^m(t)$ est le prix moyen courant pour le groupe i sur le mois m, calculé avec les quantités de l'année de base. En pratique, dans l'IPC-base 1998, on estime $P_i^m(t)$ avec les quantités courantes.
Enfin, $\bar{P}_0$ est le prix moyen du panier observé sur l'année de base. Il est calculé sur l'ensemble des groupes (i) et des mois (m).

III.4.2. L'unification européenne par imputation des trajectoires hors saison

Devant le caractère particulier des indices de produits saisonniers, la Commission européenne a jugé nécessaire de légiférer [9] sur la technique de calcul privilégiée. La méthode retenue consiste, pour une variété de produits, à utiliser les prix en saison tels qu'observés et, hors saison, des prix imputés à partir des trajectoires de prix effectivement observées sur des produits proches. En outre, afin de rendre compte des variations de consommation mensuelles, les produits saisonniers hors saison sont affectés d'un poids nul. Dans la pratique, les formules appliquées sont détaillées ci-après.

On note, comme précédemment, $I_i^{A,m}$ l'indice de la variété i au mois m de l'année A. Cet indice est calculé pour tous les mois $m \in \mathscr{S}_i$ de la saison de la variété i, selon la même procédure que celle décrite au paragraphe III.3.. Hors saison, si la détermination d'un prix est nécessaire (ce sera le cas, par exemple, si le mois de décembre est hors saison), dans ce cas, le prix du produit est déterminé à partir du dernier prix normal observé, auquel on applique l'évolution observée effectivement sur des produits proches (en général du même regroupement de la nomenclature internationale par fonctions de consommation).

On note $I_G^{A,m}$ l'indice-base décembre $A-1$ du groupe auquel appartient la variété saisonnière i précédente. Pour l'exemple, on supposera que la variété de produit i est la seule du groupe G a être saisonnière. On note $G_{(i)}$ l'ensemble des variétés du groupe G, hors la variété i. Par définition, l'indice $I_G^{A,m}$ vaut, selon que $m \in \mathscr{S}_i$ ou que $m \notin \mathscr{S}_i$:

$$\begin{cases} \text{si } m \in \mathscr{S}_i : \quad I_G^{A,m} = \left(\pi_i^{A-1} \times I_i^{A,m} + \sum\limits_{\forall j \in G_{(i)}} \pi_j^{A-1} \times I_j^{A,m} \right) \Big/ \left(\pi_i^{A-1} + \sum\limits_{\forall j \in G_{(i)}} \pi_j^{A-1} \right) \\ \text{si } m \notin \mathscr{S}_i : \quad I_G^{A,m} = \left(\sum\limits_{\forall j \in G_{(i)}} \pi_j^{A-1} \times I_j^{A,m} \right) \Big/ \left(\sum\limits_{\forall j \in G_{(i)}} \pi_j^{A-1} \right) \end{cases}$$

Une fois l'indice $I_G^{A,m}$ calculé, il est agrégé par agrégation de Laspeyres, avec un poids fixe annuel, et chaîné, conformément au schéma présenté au paragraphe III.3..

III.4.3. Simulations numériques

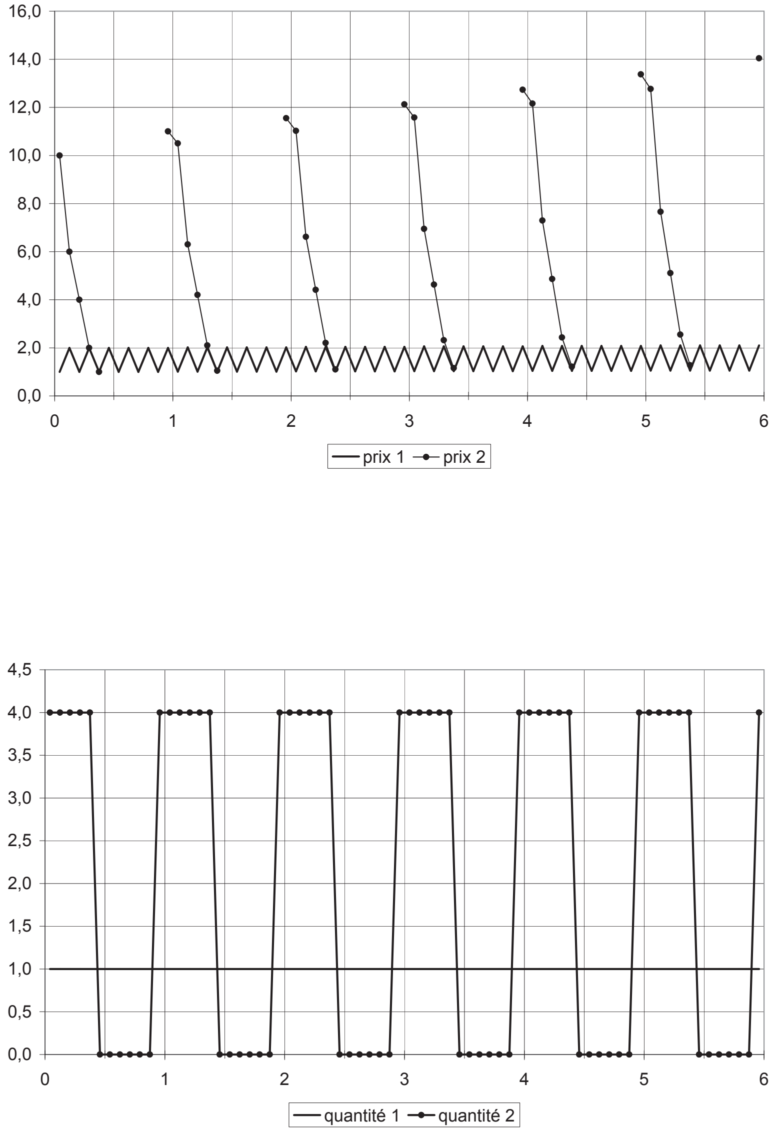
Afin d'examiner le comportement des deux indices présentés aux paragraphes III.4.1. et III.4.2., nous simulons un panier de deux biens dont les quantités et

9. Règlement de la Commission N° 330/2009 du 22 avril 2009.

les prix varient de manière saisonnière. La figure III.1 montre les prix et les quantités des deux biens au cours des 7 années de simulation. Les deux biens sont saisonniers : l'un des deux connaît des variations de prix importantes d'un mois sur l'autre sans que ses quantités ne bougent. Le second bien n'est pas vendu pendant les mois de l'été et de l'automne. Son prix épouse une trajectoire, usuelle pour les produits frais, de décroissance régulière depuis le mois d'entrée en saison jusqu'au mois de sortie. En dehors de ce profil annuel, les deux produits sont affectés d'une inflation tendancielle annuelle de 1% pour le premier produit et de 5% pour le second.
Les indices de Rothwell (§III.4.1.) et de Laspeyres chaînés par imputation (§III.4.2.) sont représentés à la figure III.2.
La figure III.3 donne le tracé des glissements annuels des indices représentés à la figure III.2.
La comparaison des indices (graphique III.2) et des glissements annuels (graphique III.3) des deux indices montre que le profil saisonnier des indices obtenus diffère légèrement : en effet, l'amplitude des variations est un peu plus marquée pour l'indice de Laspeyres chaîné par imputation que pour l'indice de Rothwell. En revanche, d'une part, le profil de ces variations est semblable ; d'autre part – et c'est là le point crucial – les tendances des indices sont très comparables puisque les glissements annuels au mois le mois des deux indices sont quasiment identiques (à quelques détails près qui nous renvoient au commentaire sur les écart d'amplitudes).

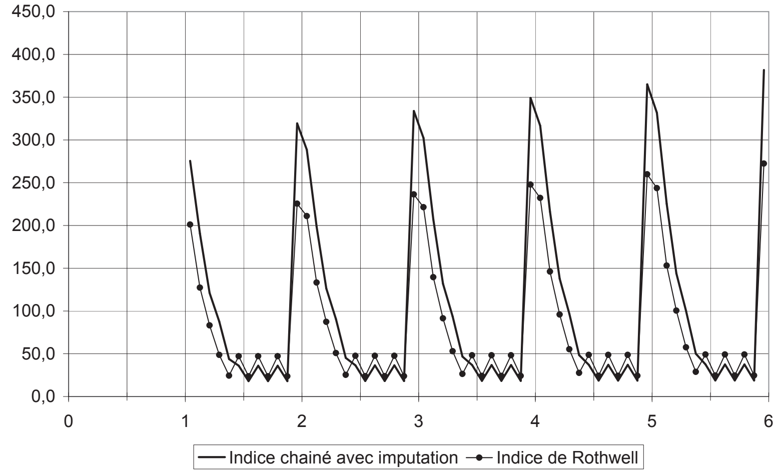
Au final, les deux indices examinés sont voisins dans la façon dont ils restituent l'évolution des prix d'un panier composé des produits saisonniers. Ni l'un ni l'autre ne souffre de biais de chaînage qui constitue l'écueil principal des indices portant sur des produits saisonniers. L'avantage de la solution adoptée au niveau européen est qu'elle ne repose pas sur une base fixe, contrairement à l'indice de Rothwell.

FIGURE III.1 – Prix et quantités des deux biens composant le panier simulé



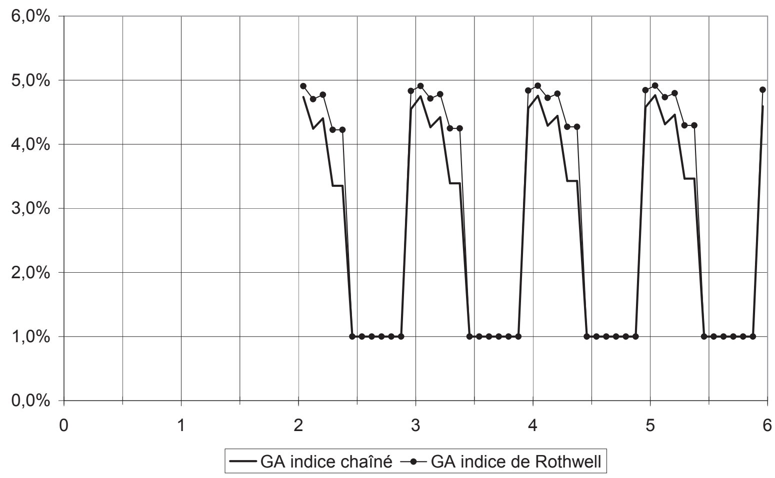
Note : les prix sont représentés au graphique du haut ; les quantités sont représentées au graphique du bas ; en abscisses, les années (au nombre de 7) et en ordonnées les valeurs de prix et de quantités simulées pour les deux produits composant le panier.

FIGURE III.2 – Indices de Rothwell et de Laspeyres chaîné par imputation pour le panier simulé



Note : indices calculés en référence à l'année de base 0, l'indice de l'année 0 n'étant pas calculable pour l'indice chaîné par imputation puisque le mois de décembre -1 n'est pas simulé.

FIGURE III.3 – Glissements annuels au mois-le-mois des indices de Rothwell et chaîné par imputation pour le panier simulé



Note : glissement annuel (indice du mois m de l'année A rapporté à celui du mois m de l'année $A - 1$; en % d'évolution) calculé à partir de l'année 2 en référence à l'année 1.

CHAPITRE IV

THÉORIE DU CONSOMMATEUR

<u>NB</u> : Toute cette partie et la suivante (chapitre V) s'appuient sur des notations vectorielles. Tous les vecteurs sont indiqués en caractères gras. Ainsi, le vecteur $\mathbf{q}$ désigne en général un vecteur de quantités $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. De même, le vecteur $\mathbf{p}$ désigne en général un vecteur de prix $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Leur produit scalaire, indiqué à l'aide d'un point, $\mathbf{p}.\mathbf{q}$ est la somme des produits de chacun des termes correspondants $\mathbf{p}.\mathbf{q} = \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell q_\ell$. Dans cette partie, on fait appel exclusivement au modèle dit « du consommateur représentatif » correspondant à une économie dans laquelle un consommateur unique achète tous les biens de consommation disponible à l'achat. Les déviations possibles à ce modèle sont examinées au paragraphe V.3. dans le cadre des problématiques d'agrégation des préférences.

IV.1. Quelques éléments sur le modèle de comportement utilitariste du consommateur

On postulera avec la théorie microéconomique, que le consommateur est capable d'émettre des préférences qui le conduisent, étant donné le budget dont il dispose, à classer les paniers de biens que son budget lui permet d'acheter et à en choisir un qui le satisfait plus que tout autre. Le consommateur est donc capable de choix qui peuvent se modéliser à l'aide d'une fonction d'utilité, opérant dans l'espace des paniers de biens et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction classe les paniers de biens conformément aux préférences du consommateur. Le consommateur choisit le panier de biens qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire.

On supposera dans la suite que la fonction d'utilité est concave, ce qui conduit à postuler l'existence d'un maximum unique du problème d'optimisation de l'utilité du consommateur. Cette hypothèse est moins forte qu'il n'y paraît puisque qu'à tout instant, il n'y a qu'une seule combinaison de bien achetée par

le consommateur représentatif dans l'économie de sorte que même s'il existe d'autres paniers que celui acheté qui satisfont autant le consommateur, un seul est effectivement sélectionné. On suppose en outre que tous les prix sont positifs (éventuellement nuls) et que les quantités achetées le sont également.
Si on note $\mathbf{p}$ le vecteur des prix et $\mathbf{q}$ celui des quantités, u l'utilité du consommateur représentatif (la fonction est supposée indépendante du temps), le consommateur décide de consommer une quantité $\mathbf{q}^\star$ de biens étant donnée sa contrainte budgétaire. Il détermine son choix en optimisant le programme suivant (R est la dépense que consent le consommateur pour l'achat du panier de biens ; son montant est donc un paramètre de l'optimisation) :

$$v(\mathbf{p}, R) = \left| \begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{q}} u(\mathbf{q}) \\ \text{s.c. } \mathbf{p}.\mathbf{q} \leqslant R \end{array} \right. \tag{IV.1}$$

La fonction v ainsi définie est appelée utilité indirecte. Elle dépend des prix $\mathbf{p}$ et du revenu R du consommateur consacré à l'achat du panier de biens considéré. Elle prend la valeur de l'utilité au point optimum $\mathbf{q}^\star$: $u(\mathbf{q}^\star) = v(\mathbf{p}, R)$.
De manière corrélative, on définit la fonction de demande associée à l'utilité indirecte. Il s'agit de l'optimum du programme précédent exprimé comme fonction de $\mathbf{p}$ et R :

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \underset{\mathbf{q}}{\text{argmax}} \{u(\mathbf{q}) | \mathbf{p}.\mathbf{q} = R\} \tag{IV.2}$$

$\mathbf{x}$ est appelée fonction de demande Marshalienne. Elle est formellement égale à $\mathbf{q}^\star$.

On note $\bar{u} = u(\mathbf{q}^\star)$. Comme on vient de le voir, $v(\mathbf{p}, R) = \bar{u}$. Le programme (IV.1) comporte un programme dual fondé sur la dépense :

$$e(\mathbf{p}, U) = \left| \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{q}} \mathbf{p}.\mathbf{q} \\ \text{s.c. } u(\mathbf{q}) = U \end{array} \right. \tag{IV.3}$$

La fonction (IV.3) est appelée fonction de dépense. De la même manière, on s'intéresse à la fonction argument du programme précédent. Il s'agit de l'optimum $\mathbf{q}^\star$ exprimé comme fonction de $\mathbf{p}$ et U.

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, U) = \underset{\mathbf{q}}{\text{argmin}} \{\mathbf{p}.\mathbf{q} | u(\mathbf{q}) = U\} \tag{IV.4}$$

$\mathbf{h}$ est appelée fonction de demande Hicksienne.

Les deux problèmes (IV.1) et (IV.3) sont duaux l'un de l'autre. En d'autres termes, avec les notations précédentes, plusieurs identités existent, sachant que seuls un vecteur $\mathbf{p}$ et un scalaire (parmi $\bar{u}$ et R) sont suffisants pour caractériser le résultat de l'optimisation :

- avec $\mathbf{p}$ et R (quelles que soient ces deux quantités) :

$$
\begin{aligned}
e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, R)) &= R && \text{(IV.5)}\\
\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) &= \mathbf{h}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, R)) && \text{(IV.6)}
\end{aligned}
$$

- avec $\mathbf{p}$ et $\bar{u}$ (quelles que soient ces quantités) :

$$
\begin{aligned}
v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) &= \bar{u} && \text{(IV.7)}\\
\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) &= \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u}) && \text{(IV.8)}
\end{aligned}
$$

Dans la nature, les fonctions d'utilité ne sont pas observables. En revanche, les choix des consommateurs le sont. Sur le plan mathématique, ce constat nous amène à nous intéresser plus particulièrement aux fonctions de demande $\mathbf{q}^\star$ (ou $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{h}$) paramétrées à l'aide des paramètres minimaux précédents. Ces fonctions sont aussi les arguments des programmes d'optimisation précédents. La compréhension du lien entre ces fonctions (observables) et la fonction d'utilité nous permettra de remonter des observations aux fonctions d'utilité, donc à la modélisation du comportement de choix du consommateur.

IV.2. Lien entre indice des prix et théorie microéconomique du consommateur

D'une manière générale, l'objectif de l'indice des prix est de rendre compte de l'évolution des prix. Cet objectif se heurte à des difficultés pratiques liées aux évolutions de la consommation dans le temps. D'une part, les goûts changent et d'autre part, les caractéristiques techniques des produits évoluent. Sur le plan théorique, les statisticiens construisent le concept d'évolution des prix en imaginant qu'il est le reflet de l'évolution du budget que doit consacrer un consommateur à ses achats pour maintenir le niveau de service que lui rendent ces achats. Conceptuellement, cette approche s'applique également pour un ensemble de consommateurs. La théorie microéconomique offre un cadre bien adapté dans le cas d'un consommateur unique. En effet, la traduction économique de l'évolution des prix telle qu'elle est décrite plus haut revient à fonder l'indice idéal sur l'évolution de la fonction de dépense d'un consommateur d'une manière que nous allons exposer à présent.

On considère deux instants : un instant de référence t et un instant t', entre lesquels on souhaite construire un indice traduisant l'évolution des prix. On se place, par la pensée, dans les conditions où les niveaux de satisfaction que tire le consommateur des paniers qu'il consomme aux deux instants sont identiques. Ceci se traduit économiquement par un niveau d'utilité identique aux deux instants. A l'instant t', le budget que doit consacrer le consommateur pour atteindre le niveau d'utilité $\bar{u}$ atteint en première étape est mesuré par la fonction de dépense appliquée au vecteur des prix $\mathbf{p}^{t'}$ de deuxième étape et à l'utilité $\bar{u}$, soit $e(\mathbf{p}^{t'}, \bar{u})$. De manière symétrique, le budget que doit consacrer le consommateur pour atteindre le niveau d'utilité $\bar{u}$ en première étape est $e(\mathbf{p}^{t}, \bar{u})$. Si on suppose que la fonction d'utilité du consommateur n'a pas changé entre les instants t et t', alors :

$$I_{UC}^{t',t}(\bar{u}) = \frac{e(\mathbf{p}^{t'}, \bar{u})}{e(\mathbf{p}^{t}, \bar{u})} \tag{IV.9}$$

$I_{UC}^{t',t}(\bar{u})$ ainsi défini est un indice qui reflète l'évolution du budget que doit consacrer le consommateur pour maintenir son utilité constante entre t et t'. Formellement, l'indice des prix microéconomique (également appelé indice à utilité constante) dépend du niveau d'utilité de référence $\bar{u}$. Il est possible d'exprimer cet indice en fonction du niveau de budget R que le consommateur consacre, en première étape, à l'achat de son panier de biens. Avec les notations précédentes :

$$I_{UC}^{t',t}(R) = \frac{e(\mathbf{p}^{t'}, v(\mathbf{p}^{t}, R))}{R} \tag{IV.10}$$

Il est utile à ce stade de définir la fonction ($\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}$ sont deux vecteurs de prix quelconques) :

$$\mu(\mathbf{p}'; \mathbf{p}, R) = e(\mathbf{p}', v(\mathbf{p}, R)) \tag{IV.11}$$

La fonction μ est appelée utilité indirecte en équivalent monétaire. Cette fonction apparaît comme étant la dépense que le consommateur doit consentir avec le vecteur de prix $\mathbf{p}'$ pour atteindre le niveau d'utilité qu'il atteint avec le vecteur de prix $\mathbf{p}$ pour une dépense R.
A l'aide de la fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire, l'indice à utilité constante s'écrit :

$$I_{UC}^{t',t}(R) = \frac{\mu(\mathbf{p}^{t'}; \mathbf{p}^{t}, R))}{R} \tag{IV.12}$$

Notons à nouveau que dans ce modèle, la fonction d'utilité ne change pas entre les deux périodes t et t' comparées ; seules les conditions de prix, de budget et de quantités échangées sont modifiées entre ces deux périodes.

Par rapport aux indices de Laspeyres et de Paasche étudiés précédemment, la particularité de l'indice à utilité constante est que, dés que les biens composant le panier de biens sont substituables, les prix et les quantités entrant dans la définition de l'indice évoluent entre les deux périodes. En conséquence, les indices à utilité constante et ceux de Paasche ou Laspeyres diffèrent [1]. Si on se place dans la situation où le panier de biens consommés est le fruit d'une

1. Sauf si l'utilité prend des formes particulières que nous explicitons au §V.2..

optimisation sous contraintes du type (IV.2), il est possible de montrer que les trois indices vérifient des inégalités.

Les utilités homothétiques Une fonction homothétique est une fonction homogène de degré 1, à une fonction monotone croissante près. Autrement dit, une fonction d'utilité u est homothétique lorsqu'elle est de la forme $u(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x}))$ où h est une fonction réelle monotone croissante et g est homogène de degré 1 (i.e. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $g(\xi \mathbf{x})) = \xi g(\mathbf{x})$). Dans ce cas, la fonction de dépense $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ est le produit d'une fonction qui ne dépend que du niveau d'utilité $\bar{u}$ et d'une fonction qui ne dépend que du vecteur $\mathbf{p}$. Montrons ce résultat.
Considérons la fonction de dépense

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}.\mathbf{x} | u(\mathbf{x}) = \bar{u}\}$$

Si u est homothétique, alors

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u} \Leftrightarrow u\left(\frac{\mathbf{x}}{h^{-1}(\bar{u})}\right) = h(1)$$

Si l'on effectue le changement de variables $\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{h^{-1}(\bar{u})}$, alors le programme définissant la fonction de dépense devient :

$$\min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}.\mathbf{x} | u(\mathbf{x}) = \bar{u}\} = \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \left\{h^{-1}(\bar{u})\ \mathbf{p}.\tilde{\mathbf{x}} | u(\tilde{\mathbf{x}}) = h(1)\right\}$$

Finalement, $e(\mathbf{p}, \bar{u}) = h^{-1}(\bar{u}) \times e(\mathbf{p}, h(1))$. Dans ces conditions, l'indice à utilité constante défini par la relation (IV.9) ne dépend pas du niveau d'utilité considéré (voir aussi à ce propos la discussion proposée au §V.4.2.).

On considère deux états de l'économie [2] : $(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)$ et $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1)$. Ces deux états correspondent à deux résultats optimaux du type (IV.2). Considérons tout d'abord le niveau d'utilité atteint en 0, noté $\bar{u}^0$. Par construction, $\bar{u}^0 = v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0)$. Examinons l'indice à utilité constante défini en (IV.9) pour ce niveau d'utilité :

$$I_{UC}^{1,0} = \frac{e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0))}{e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0))}$$

Par construction, le dénominateur de l'expression précédente est égale à la dépense en 0 : $\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0$. Le numérateur est tel que :

$$e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0)) = \min_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{p}^1.\mathbf{q} | u(\mathbf{q}) = v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0)\right\}$$

2. Cette démonstration est inspirée du chapitre 17 de ILO et al. (2004).

Par hypothèses, $u(\mathbf{x}^0) = v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0)$ donc $\mathbf{x}^0$ appartient à l'ensemble des contraintes du programme d'optimisation précédent[3]. Comme $e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0))$ est la valeur de la dépense minimale sur l'ensemble de contraintes, alors nécessairement :

$$\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^0 \geqslant e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0))$$

Cette inégalité nous permet d'établir l'inégalité suivante sur l'indice à utilité constante :

$$I_{UC}^{1,0}(\bar{u}^0) \leqslant \frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^0}{\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0} \tag{IV.13}$$

On peut noter que cette inégalité est valable pour un niveau d'utilité $\bar{u}^0$.

On peut conduire le même raisonnement pour le niveau d'utilité $\bar{u}^1$. Dans ce cas, l'indice à utilité constante s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{UC}^{1,0}(\bar{u}^1) &= \frac{e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1))}{e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1))} \\ &= \frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1}{e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1))} \end{aligned}$$

Le dénominateur de l'expression précédente est tel que :

$$e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1)) = \min_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{p}^0.\mathbf{q} | u(\mathbf{q}) = v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1)\right\}$$

Par hypothèses, $u(\mathbf{x}^1) = v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1)$ donc $\mathbf{x}^1$ appartient à l'ensemble des contraintes du programme d'optimisation précédent. Comme $e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1))$ est la valeur de la dépense minimale sur l'ensemble de contraintes, alors nécessairement :

$$\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^1 \geqslant e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1))$$

Cette inégalité nous permet d'établir l'inégalité suivante sur l'indice à utilité constante :

$$I_{UC}^{1,0}(\bar{u}^1) \geqslant \frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^1} \tag{IV.14}$$

On peut noter que cette dernière inégalité est valable pour un niveau d'utilité $\bar{u}^1$. En somme, on dispose de deux inégalités <u>bilatérales</u> (IV.13) et (IV.14) faisant référence à deux niveaux d'utilité différents. Dans le cas général, on ne peut donc pas en déduire un encadrement de l'indice à utilité constante.
En revanche, quand les préférences du consommateur représentatif sont ***homothétiques***, alors on montre que l'indice à utilité constante ne dépend pas du niveau d'utilité considéré (voir page encadré 57) ; il ne dépend que des vecteurs de prix considérés aux deux états comparés de l'économie[4]. Dans ce cas

3. $\left\{\mathbf{q} | u(\mathbf{q}) = v(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0)\right\}$.
4. Plusieurs exemple de cette propriété sont donnés pour des utilités CES au paragraphe V.2.

précis, on peut déduire un encadrement des deux inégalités précédentes :

$$\underbrace{\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^1}}_{\text{Paasche des prix}} \leqslant I^{1,0}_{UC} \leqslant \underbrace{\frac{\mathbf{p}^1.\mathbf{x}^0}{\mathbf{p}^0.\mathbf{x}^0}}_{\text{Laspeyres des prix}} \tag{IV.15}$$

IV.3. Quel vecteur $\mathbf{q}$?

Les indices à utilité constante reposent sur un modèle de comportement d'un consommateur représentatif. Ce consommateur opère des choix sur un panier de biens disponibles pour sa consommation. La définition même de ces biens est une disposition propre du modèle qu'il convient de discuter, notamment au regard de la dynamique d'entrées/sorties des articles : dans les commerces, des articles disparaissent de la vente (ou ne sont tout simplement pas achetés par les consommateurs) et d'autres apparaissent quotidiennement.

Faire l'hypothèse qu'entre deux périodes, les préférences du consommateur restent identiques revient à formuler, techniquement, l'hypothèse que la fonction d'utilité conserve la même structure et qu'entre ces deux périodes, les quantités consommées ne s'ajustent que sous l'action de l'évolution des prix et de la contrainte budgétaire du consommateur. Entre deux périodes rapprochées dans le temps, cette hypothèse paraît finalement assez raisonnable.

En revanche, le panier de biens sur lequel s'expriment ces choix, c'est-à-dire techniquement les composantes du vecteur $\mathbf{q}$ sur lequel opère l'utilité, peut se concevoir d'au moins deux manières différentes : la première est celle adoptée dans le cadre des indices de prix traditionnels, comme l'IPC français (voir aussi chapitre VI), où le panier de biens se rapporte, non pas à des articles physiques biens précis, mais plutôt à des « unités de besoins ». Dans cette modélisation de la consommation, l'unité de besoin considérée correspondant, dans la fonction d'utilité, à une composante particulière du vecteur-panier, coïncide avec un article dans un magasin à un instant donné. Si cet article disparaît, l'unité de besoin demeure et coïncide avec un article différent du précédent, mais qui remplit, aux yeux du consommateur, un usage similaire. Cette opération qui consiste à choisir un autre article pour représenter la même unité de besoin est appelée *remplacement*. La différence de prix entre l'article remplaçant et le remplacé fait l'objet d'un traitement destiné à neutraliser, dans la différence de prix, la partie liée à des différences de caractéristiques entre produits qui se traduiraient, toutes choses égales par ailleurs, par une différence d'utilité pour le consommateur (voir §IV.4.). Dans cette approche, la notion de produit suivi s'apparente donc à celle d'un usage qui doit être satisfait à chaque période de temps.

L'approche alternative consiste à traiter chaque article, consommé ou pas, comme un bien constitutif du panier sur lequel le consommateur représentatif forge ses choix. Dans ce modèle, chaque composante du vecteur sur lequel opère l'utilité correspond à un article physique unique. Mais cette approche impose d'être capable de comparer le niveau d'utilité atteint pour des paniers de biens dont la consommation de certains biens est nulle. Cette approche peut donc être pratiquée dés que l'indice déduit d'une telle fonction d'utilité autorise de telles comparaisons. Elle est parfois utilisée (Sillard 2013), mais les formules usuelles de calcul d'indice ne se prêtent pas vraiment à ce type de modèle car la plupart dégénèrent lorsque les quantités consommées sont nulles.

IV.4. Ajustements qualité

Cette section présente le principe de l'ajustement qualité dans le contexte des indices à qualité constante tel qu'exposé par Deaton & Muelbauer (1980). On retrouve également des modèles de ce type exposés par Fisher & Shell (1972) et par Deaton (1998), par exemple.
On suppose donc que l'indice des prix rend compte de l'évolution des prix de produits couvrant des unités de besoins. Les unités de besoins sont consommées par un consommateur représentatif qui décide des quantités de produits qu'il achète pour couvrir ses besoins en maximisant son utilité sous contrainte budgétaire. L'utilité opère sur un vecteur $\mathbf{q}$ d'unités de besoins. Chaque composante de $\mathbf{q}$ correspond au nombre d'unités de besoin que le consommateur désire acheter pour couvrir le besoin correspondant à la composante concernée. On suppose donc que la fonction d'utilité u ne change pas entre les deux périodes comparées (mais les vecteurs $\mathbf{q}$ si !).
Le problème du consommateur est donc le suivant : sa demande Marshalienne vaut :

$$\mathbf{x}_u(\mathbf{p}; R) = \underset{\mathbf{q}}{\operatorname{argmax}} \{u(\mathbf{q}) | \mathbf{p}.\mathbf{q} = R\}$$

et la fonction de dépense duale de la précédente vaut :

$$e_u(\mathbf{p}, \bar{u}) = \min_{\mathbf{q}} \{\mathbf{p}.\mathbf{q} | u(\mathbf{q}) = \bar{u}\}$$

Dans la mesure où les deux problèmes sont duaux l'un de l'autre, on dispose de la relation usuelle entre les deux : la dépense associée au panier optimisé et conditionnellement à la demande Marshalienne est égale à la la fonction de dépense considérée au niveau d'utilité atteint au panier optimisé. Formellement, cette propriété s'écrit :

$$\mathbf{p}.\mathbf{x}_u(\mathbf{p}, R) = e_u(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}_u(\mathbf{p}, R)))$$

Dans ce modèle, l'indice de prix à utilité constante, par définition, reproduit l'évolution du budget que le consommateur doit consacrer à sa consommation pour maintenir son utilité à un niveau constant entre deux périodes de comparaison 0 et 1 :

$$I^{1,0} = \frac{e_u(\mathbf{p}_1, u(\mathbf{x}_u(\mathbf{p}_0, R_0)))}{R_0}$$

tandis que le niveau d'utilité atteint en période 0 correspond à celui qui découle de la demande Marshalienne à cette période $u(\mathbf{x}_u(\mathbf{p_0}; R_0))$. On note $\bar{u}_0$ ce niveau d'utilité.

Considérons à présent que, pour une raison ou une autre, le besoin indicé 1 n'est plus couvert par le bien d'origine mais par un autre bien. Le bien d'origine est donc remplacé, du point du vue du consommateur, par un autre bien. Dans la mesure où les deux biens ne sont pas identiques, on ne peut pas considérer que, du point de vue du consommateur, consommer une unité du bien d'origine apporte le même niveau d'utilité que consommer une unité du nouveau bien, toutes choses égales par ailleurs. Par conséquent, il est raisonnable, pour modéliser cette situation, de poser que la consommation d'une unité du nouveau bien apporte le même niveau d'utilité que la consommation de α unités du bien d'origine. Ce coefficient α est inconnu. Ce point peut être formulé de la manière suivante : considérons pour fixer les idées que la fonction d'utilité sur laquelle le consommateur forge ses décisions de consommation en période 1 est v (tandis que cette fonction est u en période 0). Cette fonction opère sur le même ensemble de produits couvrant les mêmes besoins, à l'exception du besoin 1 qui est couvert par le nouveau bien et non plus le bien d'origine. La relation qui existe entre u et v est donc la suivante :

$$v(q_1, \mathbf{q}_{(1)}) = u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \tag{IV.16}$$

où $\mathbf{q}_{(1)}$ représente le vecteur $\mathbf{q}$ dont la première composante a été supprimée. Dans l'expression précédente, toutes choses égales par ailleurs, si $\alpha > 1$ alors la qualité du nouveau bien est plus élevée que celle de l'ancien [5], et *vice-versa* lorsque $\alpha < 1$. Le programme d'optimisation du consommateur sur la fonction v s'écrit :

$$\begin{aligned} e_v(\mathbf{p}, \bar{v}) &= \min_{\mathbf{q}} \{\mathbf{p}.\mathbf{q} | v(\mathbf{q}) = \bar{v}\} \\ &= \min_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{p}.\mathbf{q} | u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) = \bar{v}\right\} \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre du programme précédent s'écrivent (il y a n unités de besoin couvertes par le panier consommé ; λ est un multiplicateur de

5. La fonction d'utilité est, dans ce modèle, croissante par rapport à chacune de ses composantes. Consommer une unité de besoin 1 apporte un niveau d'utilité $u(\alpha, \mathbf{q}_{(1)})$, tandis que cette unité apporte une utilité $u(1, \mathbf{q}_{(1)})$ en période 0. Le surcroît d'utilité en période 1 par rapport à la période 0 est donc du signe de $\alpha - 1$.

Lagrange) :

$$\begin{cases} p_1 &= \lambda\alpha\partial_1 u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \\ p_0 &= \lambda\partial_0 u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ p_n &= \lambda\partial_n u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \\ \bar{v} &= u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \end{cases}$$

Définissons $\mathbf{r} = (\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)})$. Alors, par construction,

$$\begin{cases} p_1 &= \lambda\alpha\partial_1 u(\mathbf{r}) \\ p_0 &= \lambda\partial_0 u(\mathbf{r}) \\ \vdots & \vdots \\ p_n &= \lambda\partial_n u(\mathbf{r}) \\ \bar{v} &= u(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Les conditions précédentes, vérifiées par $\mathbf{r}$, correspondent aux conditions de premier ordre du programme $\min_{\mathbf{r}} \{\boldsymbol{\pi}.\mathbf{r} | u(\mathbf{r}) = \bar{v}\}$ où $\boldsymbol{\pi}$ est un vecteur de prix défini par $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{p_1}{\alpha}, \mathbf{p}_{(1)}\right)$. Finalement,

$$e_v(\mathbf{p}, \bar{v}) = e_u\left(\left(\frac{p_1}{\alpha}, \mathbf{p}_{(1)}\right), \bar{v}\right) \tag{IV.17}$$

Si on considère un certain niveau d'utilité, $\bar{u}$, et si on considère que le niveau d'utilité perçu du nouveau bien est plus élevé que celui du bien d'origine ($\alpha > 1$), alors on constate que, si le vecteur de prix est inchangé, la dépense nécessaire pour atteindre le niveau d'utilité $\bar{u}$ est moins élevée avec le nouveau bien qu'avec le bien d'origine :

$$\alpha < 1 \Rightarrow e_u\left(\left(\frac{p_1}{\alpha}, \mathbf{p}_{(1)}\right), \bar{u}\right) \leqslant e_u(\mathbf{p}, \bar{u})$$

dans la mesure où e_u est une fonction croissante par rapport à chacune des composantes de prix.

La conséquence principale de l'équation (IV.17) pour notre sujet est qu'il est possible de corriger le vecteur de prix afin de demeurer dans un schéma d'indice de prix à utilité constante, même si on s'autorise à effectuer des remplacements de produits dans le panier de besoins. Autrement dit, même si on ne connait ni la forme de la fonction d'utilité u ni le coefficient α qui permet d'ajuster la qualité lorsque les caractéristiques des biens changent, il est possible de corriger le vecteur de prix des nouveaux biens de sorte à rester sur la même courbe d'utilité. Cette correction qui devrait être appliquée sur le prix des nouveaux biens est exactement le coefficient α qui ajuste les quantités pour maintenir l'utilité constante dans la fonction d'utilité.

Ce coefficient α a d'ailleurs une interprétation simple. En effet, par construction (relation IV.16), l'utilité en période 1 vérifie $v(q_1, \mathbf{q}_{(1)}) \equiv u(\alpha q_1, \mathbf{q}_{(1)})$, donc l'utilité marginale par rapport au bien 1 vérifie $\frac{\partial v}{\partial q_1} = \alpha \frac{\partial u}{\partial q_1}$. Par conséquent, α est le rapport des utilités marginales par rapport au bien 1 entre les périodes 1 et 0.
Rappelons que l'utilité marginale par rapport au bien 1 s'interprète comme le gain d'utilité associé à la consommation d'une unité de bien 1 supplémentaire. α apparaît donc comme un multiplicateur du gain d'utilité associé à la consommation d'une unité supplémentaire de l'unité de besoin 1 en période 1 par rapport à la période 0.

Si on suppose que le marché est en équilibre, l'échelle des prix entre produits reflète les différences de prix qui laissent le consommateur indifférent à consommer un bien ou un autre (pour peu que chaque bien soit effectivement vendu, ce qu'on suppose être le cas). Si on peut faire l'hypothèse d'une part, que l'équilibre est respecté à chaque période de temps et d'autre part, que le bien d'origine et le nouveau sont vendus lors d'une même période de temps, alors le rapport de prix entre le nouveau bien et le bien d'origine correspond au coefficient α. En d'autres termes, le rapport de prix est exactement la valorisation que le consommateur fait de la différence de caractéristiques des produits considérés.

On peut discuter de la robustesse de l'idée d'équilibre de marché. Mais du point de vue économique, toutes les techniques alternatives utilisées pour ajuster de la qualité (modèle hédonique, recouvrement, différent corrigé – voir Léonard, Sillard, Varlet & Zoyem (2015) et ILO et al. (2004)) découlent de l'hypothèse d'équilibre de marché. La seule différence réside dans la qualité statistique de l'estimation du coefficient α. Dans cette optique, il est possible que les modèles hédoniques soient de meilleure qualité puisqu'ils reproduisent la relation *moyenne* des différences de prix à des caractéristiques observables. Ceci étant, en moyenne sur l'ensemble des remplacements réalisés, rien ne permet d'affirmer, sur un plan théorique, la supériorité de l'une ou l'autre des méthodes d'ajustement qualité dans la mesure où toutes reposent sur le même fondement économique [6].

IV.5. L'indice de Törnqvist comme meilleure approximation de l'indice à utilité constante

Nous allons montrer, dans cette partie, que l'indice de Törnqvist est, sous certaines conditions, une bonne approximation de l'indice à utilité constante de la

6. Voir Léonard et al. (2015) pour plus de détails sur les techniques couramment utilisées pour les ajustements qualité et une discussion des hypothèses sous-jacentes.

relation (IV.9). La démonstration a été publiée par Diewert (1976). Nous utilisons ci-après des notations un peu différentes de celles de cet article.

On considère une fonction f de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Au voisinage du point $\mathbf{z}_0$, elle est approximable à son développement de Taylor :

$$f(\mathbf{z}) = a_0 + \mathbf{a}'.\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'.A.\mathbf{z} + \epsilon \qquad \text{(IV.18)}$$

où $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{z}_0)$ et A est la Jacobienne de f au point $\mathbf{z}_0$ (celle-ci est symétrique car $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$).
A ce stade, il est utile de considérer la propriété suivante que nous allons démontrer :

Propriété IV.1. *Soit φ une forme quadratique définie par :*

$$\varphi(\mathbf{z}) = a_0 + \mathbf{a}'.\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'.A.\mathbf{z}$$

où A est une matrice symétrique. Alors, quels que soient les points $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_0$, on a :

$$\varphi(\mathbf{z}_1) - \varphi(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{2}\left[\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) + \nabla\varphi(\mathbf{z}_0)\right]'.(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)$$

où $\nabla\varphi$ est le gradient[7] de φ.

Démonstration : $\nabla\varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{a} + A.\mathbf{z}$. Puis,

$$\varphi(\mathbf{z}_1) - \varphi(\mathbf{z}_0) = \mathbf{a}'.(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{z}_1'.A.\mathbf{z}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{z}_0'.A.\mathbf{z}_0$$

Or, comme A est symétrique, alors $\mathbf{z}_0'.A.\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1'.A.\mathbf{z}_0$ et on observe que :

$$\mathbf{z}_1'.A.\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0'.A.\mathbf{z}_0 = (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_0)'.A.(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)$$

Il en découle que :

$$\varphi(\mathbf{z}_1) - \varphi(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{2}\left[\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) + \nabla\varphi(\mathbf{z}_0)\right]'.(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)$$

□

7. *i.e.* la dérivée. Pour être précis, si $\mathbf{z}$ est un vecteur de dimension n, $\nabla\varphi(\mathbf{z}) = (\partial_1\varphi(\mathbf{z}), \ldots, \partial_n\varphi(\mathbf{z}))'$

La propriété précédente s'applique à la fonction f aux points $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_0$:

$$f(\mathbf{z}_1) - f(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{2}\left[\nabla f(\mathbf{z}_1) + \nabla f(\mathbf{z}_0)\right].(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) + \tilde{\epsilon} \qquad \text{(IV.19)}$$

où $\tilde{\epsilon}$ est un terme complémentaire dont on supposera par la suite qu'il peut être négligé.

On considère à présent la fonction de dépense $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ découlant de f par la relation [8] :

$$\begin{cases} e(\mathbf{p}, \bar{u}) &= \exp\left[f_{\bar{u}}(\ln \mathbf{p})\right] \\ f_{\bar{u}}(\mathbf{z}) &= \ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}), \bar{u}\right)\right] \end{cases} \qquad \text{(IV.20)}$$

On suppose à ce stade que $\bar{u}$ est un simple paramètre de la fonction $f_{\bar{u}}$. De la relation (IV.19), on peut déduire une relation sur e.
En effet, de (IV.20), il découle que :

$$f_{\bar{u}}(\mathbf{z}_1) - f_{\bar{u}}(\mathbf{z}_0) = \ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}_1), \bar{u}\right)\right] - \ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}_0), \bar{u}\right)\right]$$

Il reste, pour parvenir à écrire la relation (IV.19) avec la fonction e, à exprimer les $\partial_k f_{\bar{u}}$ en fonction des dérivées [9] de e .

$$\begin{aligned} \partial_k f_{\bar{u}}(\mathbf{z}) &= \partial_k \left(\ln\left[e(\exp(\mathbf{z}), \bar{u})\right]\right) \\ &= \exp(z_k) \times \partial_k e\left(\exp(\mathbf{z}), \bar{u}\right) \times \frac{1}{e\left(\exp(\mathbf{z}), \bar{u}\right)} \end{aligned}$$

A l'aide de ces éléments, la formule (IV.19) s'écrit donc :

$$\ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}_1), \bar{u}\right)\right] - \ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}_0), \bar{u}\right)\right] =$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{e(\exp(\mathbf{z}_1), \bar{u})} \exp(\mathbf{z}_1) \otimes \nabla e\left(\exp(\mathbf{z}_1), \bar{u}\right) + \tfrac{1}{e(\exp(\mathbf{z}_0), \bar{u})} \exp(\mathbf{z}_0) \otimes \nabla e\left(\exp(\mathbf{z}_0), \bar{u}\right)\right]'.(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z_0})$$

où $\otimes$ désigne le produit terme à terme de deux vecteurs de même taille, le résultat étant lui-même un vecteur de la même taille (produit de Kronecker).
Par changement de variables $e^{\mathbf{z}_1} \to \mathbf{p}_1$ et $e^{\mathbf{z}_0} \to \mathbf{p}_0$, on a :

$$\ln\left[e\left(\mathbf{p}_1, \bar{u}\right)\right] - \ln\left[e\left(\mathbf{p}_0, \bar{u}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\left(\mathbf{p}_1, \bar{u}\right)}\mathbf{p}_1 \otimes \nabla e\left(\mathbf{p}_1, \bar{u}\right) + \frac{1}{e\left(\mathbf{p}_0, \bar{u}\right)}\mathbf{p}_0 \otimes \nabla e\left(\mathbf{p}_0, \bar{u}\right)\right]'.(\ln \mathbf{p}_1 - \ln \mathbf{p_0}) \qquad \text{(IV.21)}$$

Avec le lemme de Shephard (cf. §V.1.1. et en particulier la relation V.1), on montre que :

$$\nabla e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u})$$

8. Les fonctions $\exp$ et $\ln$ appliquées à un vecteur argument correspondent à un vecteur dont les composantes sont respectivement les exponentielles et les logarithmes des composantes du vecteur argument.

9. On parle ici des n premières dérivées partielles, $\bar{u}$ correspondant à la $(n+1)^{\text{ième}}$ composante de la fonction e.

où $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u})$ est le vecteur de demande Hicksienne (voir relation IV.4), c'est-à-dire le vecteur des quantités résultant de la minimisation de la dépense sous contrainte d'utilité (fixée au niveau $\bar{u}$). Finalement, il apparaît que :

$$\ln e\left(\mathbf{p}_1, \bar{u}\right) - \ln e\left(\mathbf{p}_0, \bar{u}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{h}_1}{\mathbf{p}_1.\mathbf{h}_1} + \frac{\mathbf{p}_0 \otimes \mathbf{h}_0}{\mathbf{p}_0.\mathbf{h}_0}\right]'.(\ln \mathbf{p}_1 - \ln \mathbf{p_0}) \qquad \text{(IV.22)}$$

où $\mathbf{h}_t \equiv \mathbf{h}(\mathbf{p}_t, \bar{u})|_{t\in\{0,1\}}$. Il est important de noter que pour $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_0$ ainsi définis, si les vecteurs des prix diffèrent, en revanche, le niveau d'utilité est le même et vaut, dans les deux cas, $\bar{u}$. L'indice des prix à utilité constante est alors :

$$I_{UC}^{1,0} = \frac{e(\mathbf{p}_1, \bar{u})}{e(\mathbf{p}_0, \bar{u})} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{(\alpha_{i1}+\alpha_{i0})/2} \qquad \text{(IV.23)}$$

où $(\alpha_{it})_{t\in\{0,1\}}$ est le poids [10] du bien i dans la dépense à la période t. $I_{UC}^{1,0}$ correspond à l'indice de Törnqvist. Il apparaît ici comme le produit d'indices de Laspeyres et de Paasche *géométriques*.

Ce résultat est important car il montre que l'indice de Törnqvist est une approximation de l'indice à utilité constante sous certaines conditions. La première condition est que l'indice de Törnqvist correspondant soit observable. En effet, pour calculer l'indice de Törnqvist, il faut que les vecteurs de prix $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$ soient observables, ce qui ne pose pas de difficulté, mais aussi les vecteurs de quantité $\mathbf{h}_0$ et $\mathbf{h}_1$. Or en pratique, lorsqu'on observe les quantités achetées à l'instant 0, on observe les quantités correspondant à un niveau d'utilité u_0 atteint par le consommateur représentatif. A l'instant 1, on observe de même le vecteur des quantités achetées par le consommateur, mais naturellement, rien ne dit que le niveau d'utilité u_1 atteint avec ce panier est identique au niveau u_0 atteint à l'instant 0. Au contraire, il y a tout lieu de penser que ce niveau diffère d'un instant à l'autre. Par conséquent, l'indice de Törnqvist tel qu'il est décrit ci-dessous, ne se calcule pas simplement, dans le cas général, avec les paniers de biens achetés aux deux instants comparés.

Toutefois, dans le cas où la fonction d'utilité est homothétique, le vecteur des quantités est proportionnel à la dépense (voir encadré « Les utilités homothétiques », page 57), moyennant quoi ce facteur apparaissant au numérateur et au dénominateur des termes de l'expression (IV.22), il se simplifie et n'intervient plus dans l'indice.

Afin d'évaluer l'ampleur des effets, nous simulons un calcul d'indice dans le cas où des substitutions sont à l'œuvre. En l'occurrence, nous simulons un indice à utilité constante comme un indice de Lloyd-Moulton (correspondant

10. $\alpha_{it} = p_{it}h_{it}/\sum_k p_{kt}h_{kt}$

donc à un indice à utilité constante dans le cas de deux biens substituables avec une élasticité de substitution constante – l'hypothèse d'homothéticité de l'utilité du consommateur étant *de facto* vérifiée) et nous examinons comment se comportent, par rapport à cet indice à utilité constante simulé, les indices de Laspeyres, de Paasche et de Törnqvist. Dans ce marché, le consommateur achète deux biens susbtituables conformément à l'utilité CES support de la simulation de l'indice à utilité constante (Lloyd-Moulton en l'occurrence – voir aussi à ce propos le paragraphe V.2.3.). La figure IV.1 montre le tracé de l'évolution des prix des deux biens constituant le panier, ainsi que les quantités achetées par le consommateur.

Les indices de Laspeyres (pondérations des biens conformément à leur poids de l'année précédente), de Paasche (pondérations des biens conformément à leur poids de l'année courante) et l'indice de Törnqvist (comme produit de l'indice de Laspeyres géométrique et de l'indice de Paasche géométrique) sont représentés à la figure IV.2. On observe la très grande proximité de l'indice de Törnqvist avec l'indice à utilité constante simulé.

Au-delà de l'indice de Törnqvist, d'autres indices, comme l'indice de Fisher, présentent une capacité à restituer l'indice à utilité constante qui serait fondé sur différentes formes relativement souples de fonctions d'utilité. De tels indices sont appelés indices superlatifs. On en trouvera un exposé dans le manuel (ILO et al. 2004). L'indice de Törnqvist est cependant le plus général puisqu'il relève des premiers termes d'un développement de Taylor, lequel constitue, par construction, la meilleure approximation possible d'une fonction d'utilité ou de dépense, au voisinage du point considéré, à l'ordre 2 de son développement.

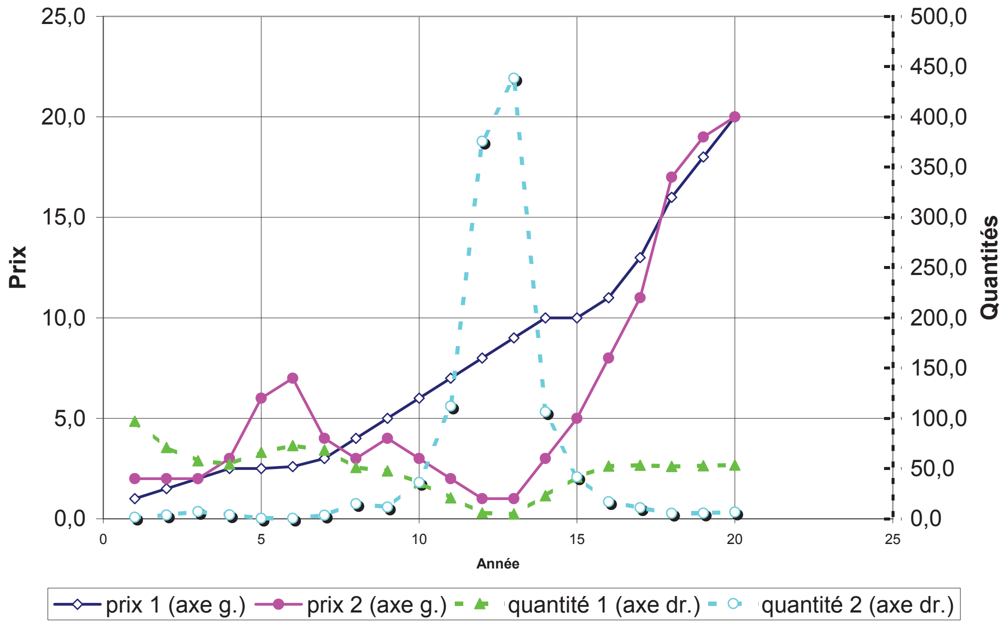
Jusqu'à présent, nous avons montré que l'indice de Törnqvist constituait une bonne approximation de l'indice à utilité constante, dans le cas où l'utilité est homothétique. Qu'en est-il lorsque cette dernière hypothèse est levée ? En particulier, l'indice de Törnqvist continue-t-il à apparaître comme une approximation valable de l'indice à utilité constante, lorsque l'utilité n'est plus homothétique ?

Pour cela revenons à l'expression de la fonction f (voir relation IV.18) en la complétant d'un terme correspondant aux dérivées partielles par rapport à u (formellement f apparaît désormais comme une fonction de $\mathbf{z}$ et de u) :

$$f(\mathbf{z}, u) = a_0 + \mathbf{a}'.\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'.A.\mathbf{z} + b_0.u + \mathbf{b}'.\mathbf{z}.u + \frac{1}{2}\delta.u^2 + \epsilon \qquad \text{(IV.24)}$$

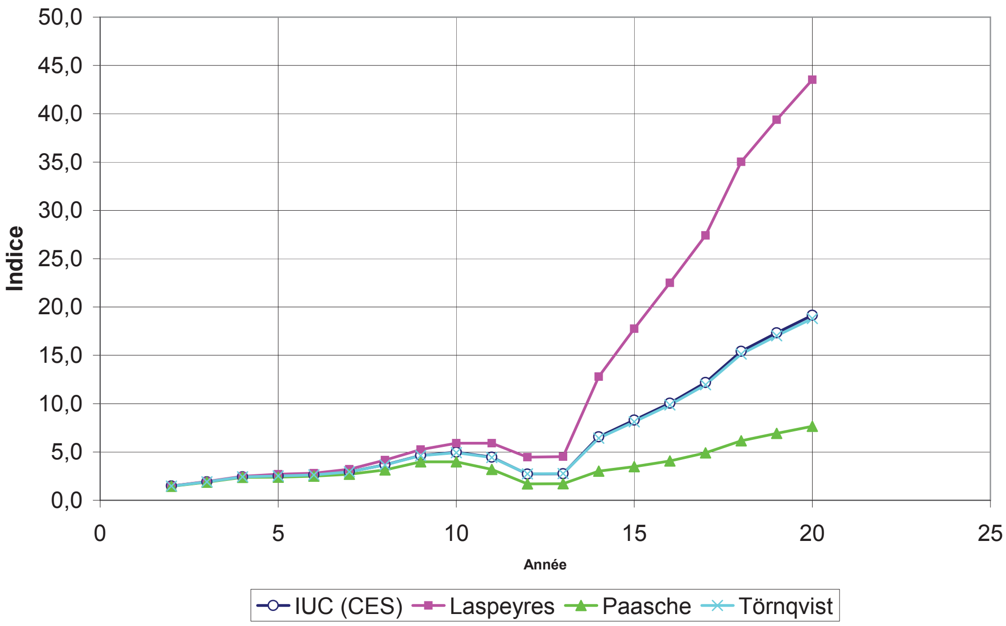
avec les mêmes notations que précédemment. Cette expression est complétée par les relations :

FIGURE IV.1 – [Simulation] : Tracé des prix et des quantités écoulées des deux biens



Note : Les quantités achetées découlent des demandes CES avec une dépense et des prix fixés arbitrairement de manière exogène pour les besoins de la simulation. Pour l'exercice, les prix sont exogènes et fixés comme indiqué sur le graphique ; les autres paramètres de la demande sont une élasticité CES égale à 3 et une dépense annuelle calculée comme une dépense initiale (en première année) de 100, affectée d'une augmentation annuelle de 14%. Les relations correspondantes sont données à l'expression (V.35).

FIGURE IV.2 – [Simulation] : Tracé des indices de prix de Laspeyres, Paasche et Törnqvist correspondant au panier présenté en figure IV.1



$$\begin{cases} e(\mathbf{p}, \bar{u}) & = & \exp\left[f(\ln \mathbf{p}, \ln \bar{u})\right] \\ f(\mathbf{z}, v) & = & \ln\left[e\left(\exp(\mathbf{z}), \exp(v)\right)\right] \end{cases}$$

On note que f apparaît, comme précédemment, comme une forme quadratique opérant sur le vecteur $\mathbf{z}$, ici augmenté, $[\ln \mathbf{p}, u]$. Il en découle que la propriété IV.1 s'applique toujours et le raisonnement conduisant à l'expression (IV.21) est directement transposable. Au final, on montre que le pendant de (IV.21) dans ce contexte élargi est :

$$\begin{aligned} \ln e\left(\mathbf{p}_1, u_1\right) - \ln e\left(\mathbf{p}_0, u_0\right) = & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\left(\mathbf{p}_1, u_1\right)}\mathbf{p}_1 \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{p}_1, u_1\right) + \frac{1}{e\left(\mathbf{p}_0, u_0\right)}\mathbf{p}_0 \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{p}_0, u_0\right)\right]' .(\ln \mathbf{p}_1 - \ln \mathbf{p_0}) \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{u_1 \partial_u e(\mathbf{p}_1, u_1)}{e(\mathbf{p}_1, u_1)} + \frac{u_0 \partial_u e(\mathbf{p}_0, u_0)}{e(\mathbf{p}_0, u_0)}\right](\ln u_1 - \ln u_0) \end{aligned} \tag{IV.25}$$

où $\nabla_{\mathbf{p}}$ désigne le gradient par rapport au vecteur $\mathbf{p}$ et ∂_u la dérivée partielle par rapport au paramètre u.

Naturellement, pour déduire un indice de prix à utilité constante de cette expression, il convient de l'écrire pour un niveau d'utilité unique $u^\star$ tout en faisant en sorte que les composantes de cet indice soient observables.

C'est possible en procédant de la manière suivante.

Tout d'abord, on note que les composantes $\mathbf{p_t} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}_t, u_t)/e(\mathbf{p}_t, u_t)$ sont observables, pour $t \in \{0, 1\}$, en vertu du lemme de Shephard et pour les mêmes raisons que celles avancées précédemment, lorsque l'utilité était homothétique. Explicitement, nous avons :

$$\frac{1}{e\left(\mathbf{p}_t, u_t\right)}\mathbf{p}_t \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{p}_t, u_t\right) = \frac{\mathbf{p}_t \otimes \mathbf{h}_t}{\mathbf{p}_t.\mathbf{h}_t}$$

où $\mathbf{h}_t$ est le vecteur des quantités consommées à la période $t \in \{0, 1\}$.

Il conviendrait donc de définir un niveau d'utilité où l'on calcule l'indice qui fasse intervenir les composantes précédentes dans la mesure où elles sont observables. Si on se place dans le cas où l'approximation (IV.24) est valable, alors, pour tout u_t et, en particulier, pour $t \in \{0, 1\}$, on a :

$$\frac{1}{e(\mathbf{p}_t, u_t)}\mathbf{p}_t \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}_t, u_t) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}A.\ln \mathbf{p}_t + \mathbf{b}.\ln u_t$$

Il en découle que pour $u^\star$ quelconque,

$$\frac{1}{e(\mathbf{p}_t, u_t)}\mathbf{p}_t \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}_t, u_t) = \frac{1}{e(\mathbf{p}_t, u^\star)}\mathbf{p}_t \otimes \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}_t, u^\star) + \mathbf{b}.(\ln u_t - \ln u^\star)$$

On en déduit que avec le même niveau d'approximation que celui utilisé pour la relation (IV.25) :

$$\ln e(\mathbf{p}_1, u^\star) - \ln e(\mathbf{p}_0, u^\star) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{h}_1}{\mathbf{p}_1.\mathbf{h}_1} + \frac{\mathbf{p}_0 \otimes \mathbf{h}_0}{\mathbf{p}_0.\mathbf{h}_0} + \mathbf{b}.(2\ln u^\star - \ln u_1 - \ln u_0)\right]'.(\ln \mathbf{p}_1 - \ln \mathbf{p}_0) \tag{IV.26}$$

On constate que pour $u^\star = \sqrt{u_1 u_0}$, le terme complémentaire en facteur du vecteur $\mathbf{b}$ s'annule dans l'expression précédente. Dans ces conditions, on peut calculer un indice de prix à utilité constante, au deuxième ordre de petitesse, dont toutes les composante sont observables. En effet, l'indice à utilité constante est, comme dans le cas d'une utilité homothétique, l'indice de Törnqvist. Mais le résultat obtenu ici est plus général, puisque nous avons montré qu'à l'ordre 2 pour la fonction de dépense, *lorsque l'utilité n'est pas homothétique*, l'indice (IV.23) est l'indice à utilité constante mesuré au niveau d'utilité moyen $u^\star = \sqrt{u_1 u_0}$.

Chapitre V

De l'observation des utilités aux indices usuels : une autre approche des formules de micro-indices et de l'agrégation de Laspeyres

Dans ce chapitre, le modèle de la théorie du consommateur est approfondi pour asseoir un certain nombre de développements utiles au calcul des indices de prix. On montre, dans un premier temps, ce qu'apporte l'observation des fonctions de demandes pour la détermination d'un indice à utilité constante et on dérive l'expression d'indices usuels (Laspeyres, Laspeyres géométrique) comme des cas particuliers d'indices plus généraux que sont les indices dérivant d'une utilité à élasticité de substitution constante [1]. Puis, on montre que l'agrégation de Laspeyres est, elle-même, un cas particulier d'indices de prix associés à des fonctions d'utilité CES imbriquées. Ceci nous conduit à examiner en détail la conséquence, sur les indices de prix, de l'existence de substitutions entre biens opérées par le consommateur. Notamment, en fin de chapitre, on étudie la question du biais de substitution, centrale dans la construction des indices de prix, et placée au cœur du débat sur les IPC par les travaux de la commission Boskin aux États-Unis à la fin des années 1990 (Boskin et al. 1998).

V.1. Passer des demandes observées à l'utilité

La demande Marshalienne est en général observable (puisque les prix le sont, de même que la dépense du consommateur). En revanche, la demande Hicksienne n'est pas directement observable car $\bar{u}$ ne l'est pas. Chacune de ces fonctions de demande constitue le point de départ d'une méthode qui permet de

1. dite CES, pour *constant elasticity of substitution*. Voir à ce propos l'encadré « L'élasticité de substitution », page 90.

passer des demandes observées aux fonctions d'utilité (ou aux indices de prix). Nous allons préciser ces deux méthodes, appelées respectivement méthode de Varian et méthode de Hausman.

V.1.1. La méthode de Varian

Pour cette première méthode, nous devons tout d'abord établir la relation qui existe entre la demande Hicksienne et la fonction de dépense. Nous suivons ici le raisonnement de Varian (1975).
Partons de la fonction de dépense (IV.3). Construisons, pour un vecteur $\mathbf{p}$ donné, la fonction

$$g_{\bar{u}}(\boldsymbol{\pi}) = e(\boldsymbol{\pi}, \bar{u}) - \boldsymbol{\pi}.\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{u})$$

La fonction $g_{\bar{u}}$ ainsi construite dépend d'un vecteur de prix quelconque $\boldsymbol{\pi}$ et du paramètre vectoriel $\mathbf{p}$. Comme e est la façon la moins coûteuse d'atteindre le niveau d'utilité $\bar{u}$ (conditionnellement à $\boldsymbol{\pi}$) et que $\mathbf{h}$ est un panier permettant d'atteindre le niveau d'utilité $\bar{u}$, la fonction $g_{\bar{u}}$ est toujours négative ou nulle. Quand $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}$, alors $g_{\bar{u}}(\mathbf{p}) = 0$. $\mathbf{p}$ est donc nécessairement un maximum pour $g_{\bar{u}}$. Il en découle que la dérivée de $g_{\bar{u}}$ s'annule en ce point[2] :

$$\forall i \; \forall U \;, \; h_i(\mathbf{p}; U) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, U)}{\partial p_i} \tag{V.1}$$

L'expression (V.1) caractérise le lien entre demande Hicksienne ($h_i(\mathbf{p}; U)$ – dont les valeurs sont observables) et fonction de dépense (non observable). Cette propriété (V.1) est connue dans la littérature sous le nom de lemme de Shephard.

On considère à présent deux situations successives. Dans la première, le consommateur consent une dépense R et fait face à des prix $\boldsymbol{\pi}$. L'utilité qu'il tire de sa consommation est simplement $v(\boldsymbol{\pi}, R)$. Puis, les prix évoluent en un vecteur $\mathbf{p}$. Le lemme de Shephard appliqué en $U = v(\boldsymbol{\pi}, R)$ s'écrit :

$$\forall i \;, \; h_i(\mathbf{p}; v(\boldsymbol{\pi}, R)) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))}{\partial p_i} \tag{V.2}$$

Cette relation peut aussi s'écrire à l'aide de la demande Marshalienne dans la mesure où les demandes Hicksienne et Marshalienne se confondent en valeurs (leur paramétrage étant différent) :

$$\forall i \;, \; x_i(\mathbf{p}; \tilde{R}) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))}{\partial p_i}$$

où $\tilde{R}$ est la dépense que le consommateur doit consentir au prix $\mathbf{p}$ pour atteindre le niveau d'utilité $v(\boldsymbol{\pi}, R)$. Par construction, $\tilde{R} = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$. Cette

2. Notations : $\mathbf{h} \equiv (h_1, \ldots, h_n)$.

dernière fonction est l'utilité indirecte en équivalent monétaire introduite en (IV.11). La relation (V.2) peut donc être réécrite à l'aide de l'utilité indirecte en équivalent monétaire et de la demande Marshalienne :

$$\forall i \ , \ x_i(\mathbf{p}, \mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R)) = \frac{\partial \mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R)}{\partial p_i} \tag{V.3}$$

Dans ce système d'équations, $\boldsymbol{\pi}$ et R sont des paramètres, la fonction μ étant une fonction de $\mathbf{p}$. Si la fonction x_i est observée (i.e. sa dépendance vis-à-vis du vecteur de prix $\mathbf{p}$ et de la dépense R sont établies), alors le système d'équations (V.3) est un système d'équations aux dérivées partielles en μ, fonction du vecteur $\mathbf{p}$ et de paramètres $\boldsymbol{\pi}$ et R, avec pour condition limite :

$$\mu(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \tag{V.4}$$

V.1.2. La méthode de Hausman

Nous suivons ici le raisonnement de Hausman (1981, 2003).
Tout d'abord, nous partons de l'identité (IV.7). Le choix de variables minimales est alors $(\mathbf{p}, \bar{u})$. Dans ces conditions, la dépense R découle des deux variables précédentes conformément à la relation $R = e(\mathbf{p}, \bar{u})$. La relation (IV.7) est une identité. Si on la dérive par rapport à chacune des composantes p_i du vecteur des prix $\mathbf{p}$, il vient :

$$\left.\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi}, R)}{\partial \pi_i}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))} + \left.\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi}, R)}{\partial R}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))} \times \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = 0$$

En application de la relation (V.2), il vient :

$$h_i(\mathbf{p}, \bar{u}) = - \left.\frac{\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial \pi_i}}{\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial R}}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))}$$

Or $h_i(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$, donc en effectuant un changement de variables minimales $(\mathbf{p}, \bar{u}) \to (\mathbf{p}, R)$ avec $R = e(\mathbf{p}, \bar{u})$, nous avons :

$$x_i(\mathbf{p}, R) = - \left.\frac{\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial \pi_i}}{\frac{\partial v(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial R}}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},R)}$$

Ceci s'écrit de manière plus simple :

$$x_i(\mathbf{p}, R) = - \frac{\dfrac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R}} \tag{V.5}$$

Cette dernière relation est appelée identité de Roy. Cette expression, comprise comme une équation aux dérivées partielles en v, permet, en observant les demandes $x_i(\mathbf{p}, R)$, de déterminer l'utilité indirecte v.

V.1.3. Application à quelques spécifications de fonctions de demandes empiriques

Toute fonction de demande ne dérive par de l'optimisation d'une utilité. Les fonctions doivent vérifier des conditions connues sous le nom de conditions d'intégrabilité (Hurwicz & Uzawa 1971). Parmi ces différentes conditions, la plus restrictive et qui va directement nous intéresser dans l'exercice d'intégration que nous allons mener est la suivante.
Revenons à la condition (V.1). Différencions cette relation par rapport à la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur des prix.

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p};U)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p},U)}{\partial p_i p_j}$$

Il découle de cette relation que :

$$\forall(i,j)\ ,\ \frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(\mathbf{p},U)}{\partial p_i} \tag{V.6}$$

Il existe une relation équivalente pour la demande Marshalienne. Pour l'obtenir, il faut se souvenir que le paramétrage de la relation précédente est réalisé avec le jeu de variables minimales $(\mathbf{p},U)$. Pour obtenir une relation sur la demande Marshalienne, il faut changer de paramétrage en $(\mathbf{p},R)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} x_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},U)) \\ &= \left.\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial \pi_j}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},R)} + \left.\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial R}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},e(\mathbf{p},U))} \times \frac{\partial e(\mathbf{p},U)}{\partial p_j}\end{aligned}$$

Or d'après (V.1), $\frac{\partial e(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} = h_j(\mathbf{p},U)$, donc

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial \pi_j}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},R)} + \left.\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\pi},R)}{\partial R}\right|_{(\boldsymbol{\pi},R)=(\mathbf{p},e(\mathbf{p},U))} \times h_j(\mathbf{p},U) \tag{V.7}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variables $(\mathbf{p},U) \to (\mathbf{p},R)$ en se rappelant que dans le cadre de ce changement de variables, $\mathbf{h}(\mathbf{p},U) = \mathbf{x}(\mathbf{p},R)$. La relation (V.7) s'écrit donc, pour le triplet de variables liées [3] $(\mathbf{p},R,U)$:

$$\forall(i,j)\ ,\ \frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R) \tag{V.8}$$

Finalement, l'égalité (V.6) traduite en demandes Marshaliennes s'écrit :

$$\forall(i,j)\ ,\ \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R) = \frac{\partial x_j(\mathbf{p},R)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_i(\mathbf{p},R) \tag{V.9}$$

3. Ces variables sont liées dans le sens où R est la dépense que doit consentir le consommateur pour atteindre un niveau d'utilité U aux prix $\mathbf{p}$; réciproquement, U est l'utilité que tire le consommateur d'une dépense R aux prix $\mathbf{p}$.

L'équation de Slustky L'équation de Slustky est une réécriture de la relation (V.8) sous la forme :

$$\forall(i,j)\ ,\ \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R)$$

Elle est d'un grand intérêt microéconomique. Sa version linéarisée est plus parlante :

$$\forall(i,j)\ ,\ \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j}\Delta p_j = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j}\Delta p_j - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R)\Delta R$$

Cette relation permet de caractériser la modification (infinitésimale) de la demande de bien i qui découle d'une variation du prix du bien j et de décomposer cette variation en deux termes : le premier terme ($\frac{\partial h_i(\mathbf{p},U)}{\partial p_j}\Delta p_j$) est un effet de substitution pur (i.e. à utilité constante) des autres biens au bien i et le second terme ($-\frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R)\Delta R$) est un effet revenu.

Dans la suite de cette section, nous allons examiner pour deux spécifications usuelles de fonctions de demandes, linéaire (§V.1.3.1.) et log-linéaire (§V.1.3.2.), les indices de prix qui en découlent. Pour établir ces indices, nous appliquons dans les deux cas les méthodes présentées *supra* de Varian (voir §V.1.1.) et de Hausman (voir §V.1.2.).

V.1.3.1. Spécification linéaire

On pourrait imaginer de retenir une spécification linéaire pour la demande, de la forme

$$x_i(\mathbf{p},R) = \gamma_i + \alpha_i p_i + \beta_i R$$

Les conditions d'intégrabilité (V.9) imposent $M_{ij} = M_{ji}$, où :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R) \\ &= \beta_i(\gamma_j + \alpha_j p_j + \beta_j R) \end{aligned}$$

Il est clair qu'en général, $M_{ij} \neq M_{ji}$, donc la spécification envisagée ne résulte pas d'une optimisation telle que proposée plus haut.

Il est toutefois possible d'adopter une spécification linéaire particulière, proposée par Deaton & Muelbauer (1980), de la forme :

$$p_i x_i(\mathbf{p},R) = \beta_i R + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} p_k$$

qui elle, sous certaines conditions, découle d'une optimisation, c'est-à-dire vérifie les conditions d'intégrabilité.

Les conditions d'intégrabilité (V.9) imposent différentes restrictions sur les $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$: en effet,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R}.x_j(\mathbf{p},R) \\ &= \frac{\beta_{ij}}{p_i} + \frac{\beta_i}{p_i}\frac{1}{p_j}\left(\beta_j R + \sum_k \beta_{jk}p_k\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M_{ij} = M_{ji} \quad \Longleftrightarrow \quad & \frac{\beta_{ij}}{p_i} + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}R + \frac{\beta_i}{p_ip_j}\sum_k \beta_{jk}p_k \\ & = \frac{\beta_{ji}}{p_j} + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}R + \frac{\beta_j}{p_ip_j}\sum_k \beta_{ik}p_k \end{aligned}$$

Pour que cette condition soit vérifiée, il faut en particulier que les deux derniers termes de chacun des membres de l'égalité précédente soient égaux, c'est-à-dire que $\beta_i\beta_{jk} = \beta_j\beta_{ik}$, soit $\beta_{jk}/\beta_{ik} = \beta_j/\beta_i$. Ceci implique que $\beta_{ik} = \beta_i\gamma_k$ pour $k \neq i$ où γ_k est une valeur à préciser qui ne dépend que de k. Moyennant quoi (pour $i \neq j$),

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\beta_i\gamma_j}{p_i} + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}R + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}\left(\sum_k \gamma_k p_k + \frac{\beta_{jj}}{\beta_j}p_j - \gamma_j p_j\right) \\ &= \frac{\beta_i\gamma_j}{p_i} + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}\left(\beta_{jj}\frac{p_j}{\beta_j} - \gamma_j p_j\right) + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}R + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}\sum \gamma_k p_k \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$M_{ij} = \frac{\beta_i}{p_i}\left(\gamma_j + \beta_{jj} - \gamma_j\beta_j\right) + \frac{\beta_i\beta_j}{p_ip_j}\left(R + \sum_k \gamma_k p_k\right)$$

M_{ij} est symétrique si et seulement si

$$\beta_{jj} = \gamma_j(\beta_j - 1)$$

Au final, $\beta_{ik} = \beta_i\gamma_k$ et $\beta_{ii} = \gamma_i(\beta_i - 1)$. La fonction de demande s'écrit, avec ces restrictions,

$$p_i x_i(\mathbf{p},R) = -\gamma_i p_i + \beta_i\left(R + \sum_k \gamma_k p_k\right)$$

La demande est donc de la forme (on remplace dans cette écriture les γ_i par leurs opposés, sans perte de généralité), les coefficients $(\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant des réels quelconques caractéristiques de la demande :

$$x_i(\mathbf{p},R) = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}\left(R - \sum_k \gamma_k p_k\right) \tag{V.10}$$

Cette forme de fonction de demande est assez classique en théorie du consommateur et s'interprète de la manière suivante (Deaton & Muelbauer 1980) : le consommateur décide de sa consommation de bien i ayant ôté au budget total qu'il a à consacrer à ses achats une somme correspondant aux besoins essentiels ($\sum_k \gamma_k p_k$). Il répartit alors le reliquat $(R - \sum_k \gamma_k p_k)$ selon une proportion qui dépend de son goût pour le bien (traduit par le coefficient β_i) et qui va décroissant en fonction du prix du bien i. Dans cette interprétation, les coefficients β_i et γ_i sont positifs et la saturation de la contrainte budgétaire se traduit par $\sum_k \beta_k = 1$, moyennant quoi, $\sum p_i x_i = R$.

Application de la méthode de Varian Nous avons donc à résoudre en μ le système d'équations différentielles suivantes :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \frac{\partial \mu}{\partial p_i} = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}\left(\mu - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k\right)$$

En distinguant les termes dépendant de p_i, cette équation s'écrit encore :

$$\frac{\partial \mu}{\partial p_i} = (1-\beta_i)\gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}\mu - \frac{\beta_i}{p_i}\sum_{k \neq i} \gamma_k p_k$$

Considérons tout d'abord cette équation comme une équation différentielle en p_i. On note en premier lieu que $F(p_i) = ap_i + b$ avec $(a, b) = (\gamma_i, \sum_{k \neq i} \gamma_k p_k)$ est une solution particulière de l'équation précédente. Puis l'équation sans second membre se résout en p_i en [4] :

$$\tilde{\mu}(p_i, \mathbf{p}_{(i)}; \boldsymbol{\pi}, R) = K(\mathbf{p}_{(i)}; \boldsymbol{\pi}, R) p_i^{\beta_i}$$

La solution en p_i vaut donc

$$\begin{aligned} \mu(p_i, \mathbf{p}_{(i)}; \boldsymbol{\pi}, R) &= K(\mathbf{p}_{(i)}; \boldsymbol{\pi}, R) p_i^{\beta_i} + \gamma_i p_i + \textstyle\sum_{k \neq i} \gamma_k p_k \\ &= K(\mathbf{p}_{(i)}; \boldsymbol{\pi}, R) p_i^{\beta_i} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k \end{aligned}$$

On peut donc chercher une solution en $\mathbf{p}$ de la forme :

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = K(\boldsymbol{\pi}, R) \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k$$

Les conditions limites (V.4) s'écrivent $\mu(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}, R) = R$, soit :

$$K(\boldsymbol{\pi}, R) \prod_{k=1}^{n} \pi_k^{\beta_k} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \pi_k = R$$

Soit,

$$K(\boldsymbol{\pi}, R) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \pi_k^{\beta_k}} \left(R - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \pi_k\right)$$

4. $\mathbf{p}_{(i)}$ est le vecteur $\mathbf{p}$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante.

Au final,

$$\mu(\mathbf{p};\boldsymbol{\pi},R) = \left(R - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \pi_k\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\pi_k}\right)^{\beta_k} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k \tag{V.11}$$

Application de la méthode de Hausman On doit résoudre l'équation différentielle en v suivante (pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$) :

$$\left[\gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}\left(R - \sum_k \gamma_k p_k\right)\right] \frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R} + \frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_i} = 0 \tag{V.12}$$

Or $\sum_i \beta_i = 1$, donc cette équation s'écrit aussi :

$$\left[(1-\beta_i)\gamma_i p_i + \left(1 - \sum_{k\neq i} \beta_k\right)\left(R - \sum_{k\neq i} \gamma_k p_k\right)\right] \frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R} + p_i \frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_i} = 0$$

L'équation est donc de la forme :

$$(\alpha_i p_i + aR + b)\frac{\partial v_i(p_i,R)}{\partial R} + p_i \frac{\partial v_i(p_i,R)}{\partial p_i} = 0 \tag{V.13}$$

où a et b dépendent de $\mathbf{p}_{(i)}$, $v_i(p_i,R) \equiv v(\mathbf{p},R)$ et, explicitement :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 - \sum_{k\neq i} \beta_k \\ b & = & -\left(1 - \sum_{k\neq i} \beta_k\right)\left(\sum_{k\neq i} \gamma_k p_k\right) \\ \alpha_i & = & (1-\beta_i)\gamma_i \end{array}\right.$$

L'équation différentielle aux dérivées partielles (V.13) est une équation linéaire du premier ordre (Laurent-Gengoux 2006). On applique à présent la méthode des caractéristiques (Wilson 2014). Géométriquement, l'équation (V.13) définit une sous-variété d'une variété. Elle est de dimension $Q-1$ par rapport à la variété qui, elle, est de dimension Q. On peut donc effectuer un changement de variables (coordonnées) de la variété de sorte que l'une des coordonnées soit « orthogonale » à la sous-variété décrite par la fonction v_i (solution de V.13). On note s cette coordonnée. Formellement, $v_i(s) = Cte$ de sorte que la dérivée totale de v_i par rapport à s est nulle. La méthode des caractéristiques consiste à déterminer s et à résoudre un jeu d'équations différentielles ordinaires qui découlent de l'expression de la dérivée nulle de v_i par rapport à s.

On suppose que p_i et R, sur v_i, sont des fonctions de s : $p_i \equiv p_i(s)$ et $R \equiv R(s)$. Moyennant quoi, la dérivée totale de v_i par rapport à s étant nulle ($v_i(s)$ est une constante), la dérivée totale de v_i par rapport à s s'écrit :

$$\frac{dv_i}{ds} = \frac{\partial v_i}{\partial R}\frac{dR}{ds} + \frac{\partial v_i}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds} = 0$$

Par identification avec la relation (V.13), on est conduit à résoudre le système d'équations différentielles (en $R(s)$ et $p_i(s)$) ordinaires :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{dR}{ds} & = & \alpha_i p_i(s) + aR(s) + b & (i) \\ \dfrac{dp_i}{ds} & = & p_i(s) & (ii) \end{array}\right. \tag{V.14}$$

La relation (V.14-ii) se résout en $p_i(s) = Ae^s$ où A est une constante d'intégration. Puis (V.14-i) devient :

$$\frac{dR}{ds} - aR(s) = \alpha_i A e^s + b \tag{V.15}$$

C'est une équation différentielle ordinaire avec second membre. L'équation sans second membre se résout en :

$$\tilde{R}(s) = Be^{as}$$

où B est une constante d'intégration. Puis on cherche une solution particulière. On cherche par exemple une solution particulière de la forme $f(s) = \mathfrak{k}e^s + \mathfrak{l}$. On constate qu'avec $\mathfrak{k} = \alpha_i A/(1-a)$ et $\mathfrak{l} = -\, b/a$,

$$f(s) = \frac{\alpha_i A}{1-a} e^s - \frac{b}{a}$$

est une solution particulière de (V.15) car $a \notin \{0, 1\}$.
Finalement,

$$\left\{\begin{array}{lcl} R(s) & = & Be^{as} + \frac{\alpha_i A}{1-a} e^s - \frac{b}{a} \\ p_i(s) & = & Ae^s \end{array}\right.$$

où A et B sont des constantes d'intégration. En pratique, on effectue le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} B \\ e^s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R \\ p_i \end{pmatrix}$$

et on prend arbitrairement $A = 1$ car s n'est définie qu'à une constante près. Moyennant quoi, $s = \ln p_i$ donc :

$$R = Bp_i^a + \frac{\alpha_i}{1-a} p_i - \frac{b}{a}$$

Il ne reste plus qu'à inverser en B le changement de variables :

$$B = \frac{1}{p_i^a} \left[R - \frac{\alpha_i}{1-a} p_i + \frac{b}{a} \right]$$

Finalement,

$$v_i(p_i, R) = F\left(p_i^{-a} \left[R - \frac{\alpha_i}{1-a} p_i + \frac{b}{a} \right] \right) \tag{V.16}$$

où F est une fonction quelconque dérivable strictement croissante de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut vérifier que v_i définie par la relation (V.16) est effectivement solution de l'équation (V.13).

A l'aide des valeurs des paramètres a, b et α_i (voir supra), on a :

$$v_i(p_i, R) = F\left(p_i^{-\beta_i}\left[R - \sum_k \gamma_k p_k\right]\right)$$

F étant quelconque, l'argument est défini à une constante [5] multiplicative près, ce qui va nous donner, par symétrie, une expression pour $v(\mathbf{p}, R)$:

$$v(\mathbf{p}, R) = F\left[\frac{R - \sum_k \gamma_k p_k}{\prod_k p_k^{\beta_k}}\right] \tag{V.17}$$

On vérifie de même que cette fonction, pour F quelconque dérivable strictement croissante, est solution de (V.12).

Enfin, on peut vérifier qu'on retrouve l'expression de la fonction d'utilité en équivalent monétaire obtenue par la méthode de Varian. On inverse l'expression de v (V.17) en R pour obtenir la fonction de dépense :

$$U = F\left[\frac{R - \sum_k \gamma_k p_k}{\prod_k p_k^{\beta_k}}\right]$$

donc, pour F inversible,

$$R \equiv e(\mathbf{p}, U) = \prod_k p_k^{\beta_k} F^{-1}(U) + \sum_k \gamma_k p_k$$

Puis, $\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$. Soit,

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) &= \prod_k p_k^{\beta_k} F^{-1} \circ F\left[\frac{R - \sum_k \gamma_k \pi_k}{\prod_k \pi_k^{\beta_k}}\right] + \sum_k \gamma_k p_k \\
&= \left(R - \sum_k \gamma_k \pi_k\right) \prod_k \left(\frac{p_k}{\pi_k}\right)^{\beta_k} + \sum_k \gamma_k p_k
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression recherchée correspondant à la relation (V.11).

Finalement, l'indice des prix associé à une spécification linéaire de la demande (V.10), pour des prix passant d'un niveau $\mathbf{p}^0$ en période de base à un niveau $\mathbf{p}^1$ en période courante, est de la forme :

$$I_{lin}^{1,0} = \frac{1}{R^0}\left\{\left(R^0 - \sum_k \gamma_k p_k^0\right) \prod_k \left(\frac{p_k^1}{p_k^0}\right)^{\beta_k} + \sum_k \gamma_k p_k^1\right\} \tag{V.18}$$

On note que cet indice dépend du niveau de dépense R^0 en période de base (0) ce qui signifie, en particulier, que l'utilité sous-jacente n'est pas homothétique (voir encadré « Les utilités homothétiques » page 57).

5. constante vis-à-vis de p_i et R ; celle-ci dépend donc de $\mathbf{p}_{(i)}$.

V.1.3.2. Spécification log-linéaire

Considérons une spécification de la forme

$$x_i(\mathbf{p}, R) = p_i^{\alpha_i} R^{\beta_i} e^{\gamma_i}$$

Cette spécification est log-linéaire : $\ln[x_i(\mathbf{p}, R)] = \gamma_i + \alpha_i \ln p_i + \beta_i \ln R$. L'application des conditions d'intégrabilité conduit à :

$$M_{ij} = \frac{\beta_i}{R} x_i(\mathbf{p}, R) x_j(\mathbf{p}, R)$$

Naturellement, $M_{ij} = M_{ji} \Leftrightarrow \beta_i \equiv \beta$. Sous cette réserve, la spécification

$$x_i(\mathbf{p}, R) = p_i^{\alpha_i} R^{\beta} e^{\gamma_i} \tag{V.19}$$

vérifie les conditions d'intégrabilité.

Application de la méthode de Varian Nous avons donc à résoudre en μ le système d'équations différentielles suivant :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \frac{\partial \mu}{\partial p_i} = p_i^{\alpha_i} \mu^{\beta} e^{\gamma_i}$$

Pour i, nous avons en particulier $\frac{\partial \mu}{\partial p_i} = p_i^{\alpha_i} \mu^{\beta} e^{\gamma_i}$ qui se résout, partiellement, en intégrant sur p_i :

$$\frac{\mu^{1-\beta}}{1-\beta} = \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} e^{\gamma_i} + C_{(i)}$$

où $C_{(i)}$ est une constante d'intégration ne dépendant pas de p_i. On peut donc chercher une solution de la forme

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = \left\{ (1-\beta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} e^{\gamma_i} + C(\boldsymbol{\pi}, R) \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Les conditions limites (V.4) s'écrivent ici $\mu(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}, R) = R$, soit

$$C(\boldsymbol{\pi}, R) = \frac{1}{1-\beta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} e^{\gamma_i}$$

Finalement,

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = \left\{ (1-\beta) \left[\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i} - \pi_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{V.20}$$

Application de la méthode de Hausman On doit résoudre le système d'équations aux dérivées partielles en v suivant :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ e^{\gamma_i} p_i^{\alpha_i} R^{\beta} \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} + \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} = 0$$

On procède par séparation des variables : on cherche une solution $v(\mathbf{p}, R)$ de la forme $v(\mathbf{p}, R) = K(\mathbf{p}_{(i)})\Lambda(p_i)\Omega(R)$, où $\mathbf{p}_{(i)}$ est le vecteur $\mathbf{p}$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante. Avec ces notations, le système précédent s'écrit [6] :

$$e^{\gamma_i} p_i^{\alpha_i} R^{\beta} \Lambda(p_i)\Omega'(R) + \Lambda'(p_i)\Omega(R) = 0$$

soit encore,

$$e^{\gamma_i} p_i^{\alpha_i} \frac{\Omega'(R)}{\Omega(R)} = -R^{-\beta} \frac{\Lambda'(p_i)}{\Lambda(p_i)}$$

On intègre membre de gauche et membre de droite de l'égalité précédente sur R et p_i. Il en résulte la relation suivante :

$$e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} \ln \Omega(R) = -\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} \ln \Lambda(p_i) + C(\mathbf{p}_{(i)})$$

où $C(\mathbf{p}_{(i)})$ est une constante d'intégration qui ne dépend ni de R, ni de p_i. Par identification, on en déduit que Ω et Λ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega(R) & = & \exp\left(-\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta}\right) \\ \Lambda(p_i) & = & \exp\left(e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right) \end{array} \right.$$

sont des formes candidates pour la définition de v. Il en découle que v a pour forme :

$$v(\mathbf{p}, R) = K(\mathbf{p}_{(i)}) \exp\left\{-\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right\}$$

où $K(\mathbf{p}_{(i)})$ est une fonction à déterminer. Par symétrie sur i, on en déduit que v est de la forme :

$$v(\mathbf{p}, R) = \exp\left\{-\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i} + Cte\right\}$$

où la constante Cte est indépendante de R et de $\mathbf{p}$. On note, d'une manière générale, que l'utilité est définie à une constante multiplicative près, donc pour la suite du raisonnement, on peut faire l'hypothèse que $Cte = 0$ sans perte de généralité.

Une fois que la fonction $v(\mathbf{p}, R)$ est déterminée, on peut vérifier que ce résultat est compatible avec celui trouvé à l'aide de la méthode de Varian. Pour cela, il faut calculer l'utilité indirecte en équivalent monétaire qui découle de l'expression de v. On calcule tout d'abord $e(\mathbf{p}, U)$ en inversant en R la fonction v :

$$U = \exp\left\{-\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right\} \Longleftrightarrow$$
$$R = \left\{(1-\beta)\left[-\ln U + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} \frac{p_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\beta}}$$

6. Ω' et Λ' sont respectivement les fonctions dérivées de Ω et Λ.

Cette dernière expression définit la fonction de dépense $e(\mathbf{p}, U)$. Puis, $\mu(\mathbf{p};\boldsymbol{\pi}, R) = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$. Par conséquent,

$$\mu(\mathbf{p};\boldsymbol{\pi}, R) = \left\{(1-\beta)\left[\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i}\frac{p_i^{1+\alpha_i} - \pi_i^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{V.21}$$

Cette expression est identique à (V.20).

Finalement, l'indice des prix associé à une spécification log-linéaire de la demande (V.19), pour des prix passant d'un niveau $\mathbf{p}^0$ en période de base à un niveau $\mathbf{p}^1$ en période courante, est de la forme :

$$I_{loglin}^{1,0} = \frac{1}{R^0}\left\{(1-\beta)\left[\frac{(R^0)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i}\frac{(p_i^1)^{1+\alpha_i} - (p_i^0)^{1+\alpha_i}}{1+\alpha_i}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{V.22}$$

On note que, comme dans le cas de la spécification linéaire, cet indice dépend du niveau de dépense R^0 en période de base (0) ce qui signifie, en particulier, que l'utilité sous-jacente n'est pas homothétique (voir encadré « Les utilités homothétiques », page 57).

V.2. Les indices à utilité constante pour quelques fonctions d'utilité usuelles

Dans ce paragraphe, nous étudions les indices de prix qui découleraient de l'adoption par le consommateur des fonctions d'utilité de Cobb-Douglas, Léontief et CES[7]. Ces fonctions présentent la particularité d'être homothétiques[8] ce qui implique que l'expression de l'indice de prix à utilité constante qui résulte de leur adoption ne dépend pas de la dépense de la période de référence. C'est une propriété très pratique[9] qui montre d'ailleurs combien ces fonctions sont spécifiques, mais finalement assez semblables entre elles.

V.2.1. Fonction d'utilité de Cobb-Douglas

Supposons que les préférences du consommateur représentatif soient reflétées par une fonction de Cobb-Douglas (n biens) : $u(\mathbf{q}) = q_1^{\alpha_1} \times \ldots \times q_n^{\alpha_n}$ avec $\sum \alpha_i = 1$ et $\alpha_i > 0$. Avec ces restrictions, $u(\mathbf{q})$ est concave[10]. Le Lagrangien du programme (IV.3) s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \lambda) = q_1^{\alpha_1} \ldots q_n^{\alpha_n} + \lambda(R - \mathbf{p}.\mathbf{q})$$

7. *constant elasticity of substitution*
8. voir encadré « Les utilités homothétiques », page 57
9. Qui ne va toutefois pas sans poser des problèmes. Par exemple, la courbe d'Engel (c'est le chemin d'expansion du revenu qui lie demande et revenu) associée est une droite, donc on perd beaucoup en généralité en adoptant ce type d'utilité. Voir à ce propos le paragraphe V.4.2.
10. Il s'agit ici d'une propriété souhaitable qui implique qu'un agent préfère les paniers intermédiaires aux paniers extrêmes.

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Les conditions du premier ordre s'écrivent donc ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$) :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \alpha_i u(\mathbf{q}) = \lambda p_i q_i$$

L'application de la contrainte budgétaire à partir de cette dernière expression implique que $\lambda = \frac{u(\mathbf{q})}{R}$, donc $p_i q_i^\star = \alpha_i R$. Cette dernière relation nous donne la fonction de demande Marshalienne :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ x_i(\mathbf{p}, R) = \alpha_i \frac{R}{p_i} \tag{V.23}$$

Puis, l'utilité indirecte s'écrit $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$, soit :

$$v(\mathbf{p}, R) = R \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right)^{\alpha_i} \tag{V.24}$$

La fonction de dépense peut être obtenue en inversant l'utilité indirecte en R pour $v(\mathbf{p}, R) = \bar{u}$, soit :

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \tag{V.25}$$

La fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire vaut $\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$, soit :

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\pi_i} \right)^{\alpha_i} \tag{V.26}$$

Finalement, l'indice des prix à utilité constante associé à une utilité de Cobb-Douglas, pour des prix passant d'un niveau $\mathbf{p}^0$ en période de base à un niveau $\mathbf{p}^1$ en période courante, s'écrit donc :

$$I^{1,0}_{[Cobb-D]} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\alpha_i} \tag{V.27}$$

Comme évoqué plus haut, on note que l'indice ainsi obtenu ne dépend pas du niveau d'utilité atteint à la période 0. Il s'agit d'une moyenne géométrique des rapports de prix obtenus pour chacun des n biens composant le panier suivi. Cela correspond à un indice de type Laspeyres géométrique (voir table III.1). On note que la demande Marshalienne de bien i (Eq. V.23) ne dépend pas des prix des autres biens : la dépense consacrée au bien i (valant $p_i x_i(\mathbf{p}, R)$) ne dépend pas du prix du bien i et représente une fraction constante α_i de la dépense totale du consommateur (R).

V.2.2. Fonction d'utilité de Léontief

Supposons que les préférences du consommateur représentatif soient reflétées par une fonction de Léontief (n biens) : $u(\mathbf{q}) = \min\{\alpha_1 q_1, \ldots, \alpha_n q_n\}$. Calculons

la fonction de dépense. Formellement, pour déterminer la solution de (IV.3), et en particulier la fonction de dépense $e(\mathbf{p}, \bar{u})$, on ne peut pas utiliser les méthodes classiques d'optimisation car u n'est pas une fonction continue. Il faut donc raisonner directement à partir de la fonction d'utilité.
Considérons les paniers de biens en lesquels $u(\mathbf{q}) = \bar{u}$. Pour un tel panier, il existe au moins une composante ℓ telle que $\alpha_\ell q_\ell = \bar{u}$. Par construction, pour tout $i \neq \ell$, $\alpha_i q_i \geqslant \alpha_\ell q_\ell$. La dépense associée à un tel panier est $D(\mathbf{q}, \bar{u}) = \sum_i p_i q_i$. Compte tenu de l'inégalité précédente,

$$D(\mathbf{q}, \bar{u}) \geqslant \bar{u} \sum_i \frac{p_i}{\alpha_i}$$

$D(\mathbf{q}, \bar{u})$ est minimale, pour un niveau d'utilité $\bar{u}$, lorsque l'inégalité précédente est saturée. Ainsi, la fonction de dépense vaut :

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u} \sum_i \frac{p_i}{\alpha_i} \tag{V.28}$$

A l'optimum, pour tout i, $\alpha_i x_i = \bar{u}$, ce qui nous conduit à une expression des fonctions de demande Hicksienne :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ h_i(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{\alpha_i} \tag{V.29}$$

L'utilité indirecte s'obtient en inversant la fonction de dépense :

$$R = \bar{u} \sum \frac{p_i}{\alpha_i} \Rightarrow \bar{u} = R \left(\sum \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{-1}$$

soit

$$v(\mathbf{p}, R) = R \left(\sum \frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{-1} \tag{V.30}$$

Puis, par l'identité de Roy (Eq. V.5), on peut calculer la fonction de demande [11] :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ x_i(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\alpha_i \sum_k \frac{p_k}{\alpha_k}} \tag{V.31}$$

L'utilité indirecte en équivalent monétaire s'écrit $\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$, soit, avec les expressions précédentes,

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \frac{\displaystyle\sum_i \frac{p_i}{\alpha_i}}{\displaystyle\sum_j \frac{\pi_j}{\alpha_j}} \tag{V.32}$$

Finalement, l'indice des prix à utilité constante associé à une utilité de Léontief, pour des prix passant d'un niveau $\mathbf{p}^0$ en période de base à un niveau $\mathbf{p}^1$ en

11. La fonction de demande peut aussi être calculée à l'aide de l'expression de la demande Hicksienne (Eq. V.29) et de l'inversion de la relation (V.28).

période courante, s'écrit donc :

$$I^{1,0}_{[Léont]} = \frac{\sum_i \frac{p_i^1}{\alpha_i}}{\sum_j \frac{p_j^0}{\alpha_j}} \tag{V.33}$$

Il s'agit donc d'un indice de prix de type Laspeyres (voir table III.1).

V.2.3. Fonction d'utilité CES

Supposons que les préférences du consommateur représentatif soient reflétées par une fonction CES [12] (n biens) : $u(\mathbf{q}) = (\alpha_1 q_1^\rho + \dots \alpha_n q_n^\rho)^{1/\rho}$. Avec ces notations, on montre (Arrow, Chenery, Minhas & Solow 1961) que l'utilité est une fonction concave pour $1 - \rho > 0$. On fait donc l'hypothèse que $\rho < 1$. Le Lagrangien du programme (IV.3) s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \lambda) = (\alpha_1 q_1^\rho + \dots \alpha_n q_n^\rho)^{1/\rho} + \lambda(R - \mathbf{p}.\mathbf{q})$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent donc ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$) :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \frac{1}{\rho}\rho\alpha_i q_i^{\rho-1} u(\mathbf{q})^{1-\rho} = \lambda p_i$$

Il en découle que $\alpha_i q_i^\rho u(\mathbf{q})^{1-\rho} = \lambda p_i q_i$. L'application de la contrainte budgétaire (sommation des termes de gauche et de droite pour $i \in \{1, \dots, n\}$) à cette dernière relation implique que $\lambda R = u(\mathbf{q})^\rho u(\mathbf{q})^{1-\rho} = u(\mathbf{q})$. En réintroduisant cette dernière expression dans les conditions de premier ordre, nous avons :

$$\alpha_i q_i^{\rho-1} u(\mathbf{q})^{-\rho} = R^{-1} p_i \tag{V.34}$$

On peut mettre les termes de gauche et droite à la puissance [13] $r = \frac{\rho}{\rho-1}$. Il en découle que :

$$\alpha_i^r q_i^\rho u(\mathbf{q})^{-\rho r} = R^{-r} p_i^r$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\alpha_i q_i^\rho u(\mathbf{q})^{-\rho r} = \alpha_i^{1-r} R^{-r} p_i^r$$

Par sommation des deux termes, nous avons :

$$u(\mathbf{q})^{\rho(1-r)} = R^{-r} \sum_i \alpha_i \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^r$$

Puis, $\rho(1-r) = -r$, donc

$$u(\mathbf{q}) = R \left[\sum_i \alpha_i \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^r\right]^{-\frac{1}{r}}$$

12. Constant elasticity of substitution
13. pour $\rho < 1$, la fonction $r(\rho) = \frac{\rho}{\rho-1}$ est à valeurs dans $]-\infty, 1[$, décroissante, et telle que $r(-\infty) = 1$ et $r(1^-) = -\infty$.

Il ne reste plus qu'à substituer cette dernière expression à celle de $u(\mathbf{q})$ apparaissant dans la relation (V.34) et à résoudre en q_i. Ceci nous donne la fonction de demande Marshalienne :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ x_i(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{p_i} \frac{\alpha_i \left(\dfrac{p_i}{\alpha_i}\right)^r}{\displaystyle\sum_k \alpha_k \left(\dfrac{p_k}{\alpha_k}\right)^r} \tag{V.35}$$

Puis, l'utilité indirecte s'écrit $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$, soit :

$$v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\left(\displaystyle\sum_k \alpha_k \left(\dfrac{p_k}{\alpha_k}\right)^r\right)^{1/r}} \tag{V.36}$$

La fonction de dépense s'obtient par inversion de l'expression précédente en R pour un niveau d'utilité indirecte $\bar{u}$, soit :

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u} \left(\sum_k \alpha_k \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^r\right)^{1/r} \tag{V.37}$$

La fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire vaut $\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$, soit :

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \, \frac{\left(\displaystyle\sum_k \alpha_k \left(\dfrac{p_k}{\alpha_k}\right)^r\right)^{1/r}}{\left(\displaystyle\sum_j \alpha_j \left(\dfrac{\pi_j}{\alpha_j}\right)^r\right)^{1/r}} \tag{V.38}$$

Finalement, l'indice des prix à utilité constante associé à une utilité CES, pour des prix passant d'un niveau $\mathbf{p}^0$ en période de base à un niveau $\mathbf{p}^1$ en période courante, s'écrit donc :

$$I^{1,0}_{[CES]} = \frac{\left(\displaystyle\sum_k \alpha_k \left(\dfrac{p^1_k}{\alpha_k}\right)^r\right)^{1/r}}{\left(\displaystyle\sum_j \alpha_j \left(\dfrac{p^0_j}{\alpha_j}\right)^r\right)^{1/r}} \tag{V.39}$$

L'élasticité de substitution L'élasticité de substitution du bien i par rapport au bien j est la quantité

$$\sigma_{i/j} = \frac{\Delta \ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\Delta \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right)} \simeq \frac{\Delta\left(\frac{x_i}{x_j}\right) / \left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\Delta\left(\frac{p_i}{p_j}\right) / \left(\frac{p_i}{p_j}\right)}$$

Elle caractérise la variation relative des quantités de bien i et de bien j consommées lorsque les prix des deux biens connaissent eux-mêmes une variation relative. Cette grandeur est, en général, négative. Avec les définitions retenues dans le texte, $\varepsilon_{i/j} = -\sigma_{i/j}$, donc $\varepsilon_{i/j} > 0$. Lorsque $\varepsilon_{i/j} = 0$, les biens ne sont pas substituables. L'utilité sous-jacente est celle de Leontief. Lorsque $\varepsilon_{i/j} = 1$, l'élasticité est unitaire : une variation des prix relatifs donnée entraîne une variation opposée et dans les mêmes proportions des quantités demandées. L'utilité sous-jacente est celle de Cobb-Douglas (pour plus de détails sur le lien entre utilité et élasticité de substitution, voir par exemple Balk (1999)).

La fonction d'utilité CES présente l'intérêt de distinguer l'élasticité de substitution comme paramètre caractéristique (encadré *L'élasticité de substitution*). Cette élasticité [14] vaut $\varepsilon = (1-\rho)^{-1} = 1-r$ (voir par exemple Picard (1998)). En particulier, contrairement à l'utilité de Cobb-Douglas (cf. §V.2.1.) d'élasticité unitaire ou à l'utilité de Léontief (cf. §V.2.2.) d'élasticité nulle, l'élasticité CES permet de traiter toutes les situations possibles de substitution avec élasticité constante.
L'indice des prix (V.39), traduisant l'évolution des prix passant d'un vecteur de prix $\mathbf{p}^0$ à $\mathbf{p}^1$, écrit à l'aide de (la valeur absolue de) l'élasticité de substitution ε devient :

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0; \varepsilon) = \left\{ \frac{\sum_k \alpha_k \left(\frac{p_k^1}{\alpha_k}\right)^{1-\varepsilon}}{\sum_j \alpha_j \left(\frac{p_j^0}{\alpha_j}\right)^{1-\varepsilon}} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{V.40}$$

Cet indice correspond à l'indice de Lloyd-Moulton (voir table III.1).
Avec le paramétrage CES, on peut aussi bien décrire une situation où tous les biens sont fortement substituables (élasticité de substitution ε élevée correspondant au cas où ρ est positif et proche de 1 ou encore $r < 0$) ou au contraire, une situation où les biens sont très peu substituables (élasticité ε tendant vers 0 correspondant au cas où ρ est négatif et petit ou encore $r > 0$).

14. Ainsi définie, la fonction $\varepsilon(\rho) = (1-\rho)^{-1}$ est, pour $\rho < 1$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, croissante et telle que $\varepsilon(\rho = -\infty) = 0$ et $\varepsilon(\rho = 1^-) = +\infty$. On note que $\varepsilon(\rho = 0) = 1$. En tant que fonction de $r \in]-\infty, 1[$, $\varepsilon(r)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et telle que $\varepsilon(r = -\infty) = +\infty$ et $\varepsilon(r = 1^-) = 0$. On note que $\varepsilon(r = 0) = 1$.

V.3. Agrégation

Il y a deux sujets sur l'agrégation. Le premier concerne l'agrégation des préférences des consommateurs. Pour l'instant nous n'avons travaillé qu'avec un modèle traitant d'un consommateur représentatif qui consomme toute la consommation. Il est évident que dans le monde réel, la consommation est le fait d'un grand nombre de consommateurs individuels et la question se pose de savoir si le modèle qui suggère que la consommation résulte d'une optimisation générale d'une fonction d'utilité collective est pertinent. L'une des façons de questionner cette pertinence est d'examiner dans quelle mesure l'optimisation des préférences individuelles sous contraintes budgétaires est équivalente à l'optimisation d'un fonction d'utilité d'ensemble. Ce problème est connu dans la littérature sous le nom d'« agrégation des préférences » et est étudié au paragraphe V.3.1.
Pour le second volet de l'agrégation, on revient au modèle classique du consommateur représentatif qui consomme l'ensemble des biens de consommation. Les modèles examinés jusqu'à présent supposent tous, à un niveau ou un autre, que le marché étudié est d'extension limitée, tant géographique qu'économique. En effet, l'idée de base repose sur la substituabilité des biens du panier ce qui suppose que d'une part, ces biens soient physiquement substituables – d'où une extension géographique du marché limitée – et d'autre part, que ces biens le soient par nature – donc les biens sont proches en nature –. L'optimisation sous contrainte ainsi modélisée porte donc sur un marché élémentaire. La question se pose de savoir sous quelles conditions il existe une utilité portant sur l'ensemble du champ de la consommation dont l'optimisation serait équivalente à l'optimisation d'autant d'utilités qu'il y a de marchés élémentaires. Nous examinons cette question de déconcentration de l'optimum global en optima locaux ou sectoriels au paragraphe V.3.2.

V.3.1. Agrégation des préférences individuelles

Le sujet de l'agrégation des préférences individuelles est un sujet qui a été abondamment étudié dans la littérature économique dans l'immédiat après-guerre, lorsque la formalisation mathématique des sciences économiques s'est développée. S'il était clair au niveau microéconomique qu'il était possible de rendre compte de choix opérés par un consommateur conditionnellement à son budget parmi les biens qu'il pouvait acheter (théorie dite « des préférences révélées », voir Varian (1975)), la question des implications de ce comportement sur les grandeurs agrégées (macroéconomiques) se posait assez logiquement. En particulier, les choix révélés par les achats, traduisant en particulier l'existence de biens substituables aux yeux du consommateur individuel, se transportent-ils à un niveau plus agrégé ? La réponse est clairement négative et ceci est connu de longue date (voir Malinvaud (1956) pour un historique détaillé). Ainsi la théorie microéconomique du consommateur ne fixe aucune référence particulière sur le comportement agrégé, par exemple au niveau d'un ensemble de consommateurs. Pour trouver des modèles agrégés découlant d'un modèle individuel, il faut recourir à une forme particulière de fonctions d'utilité : la forme de Gorman. Dans ce cas, la fonction d'utilité indirecte du consommateur i a pour expression :

$$v_i(\mathbf{p}, R_i) = a_i(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R_i$$

et à la condition que toutes les fonctions d'utilité individuelles de chaque consommateur soit du type précédent, alors, tout se passe comme s'il existait un consommateur représentatif consommant l'ensemble de la consommation et déterminant ses choix en optimisant une utilité indirecte, somme des utilités indirectes individuelles :

$$V(\mathbf{p}, R_i) = A(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R$$

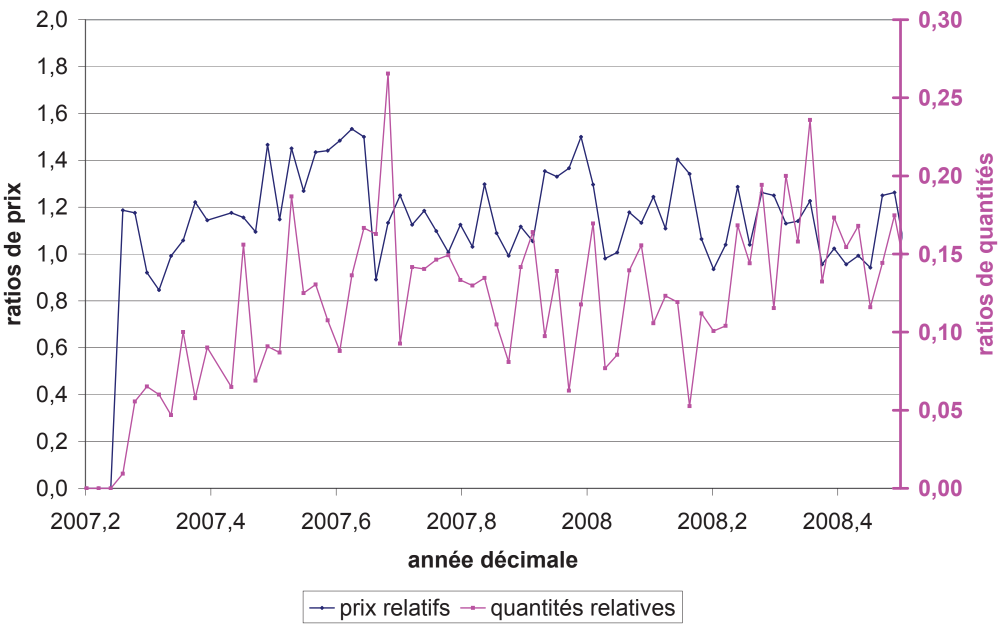
où

$$\begin{cases} A(\mathbf{p}) & = & \sum_i a_i(\mathbf{p}) \\ R & = & \sum_i R_i \end{cases}$$

On montre que la forme de Gorman est une condition nécessaire et suffisante portant sur les fonctions d'utilité indirectes individuelles pour qu'un modèle agrégé en découle (Varian 1975). A noter qu'une fonction d'utilité homothétique respecte la forme de Gorman : en effet, si l'utilité associée à l'utilité indirecte $v_i(\mathbf{p}, R_i)$ est homothétique, alors $v_i(\mathbf{p}, R_i) = \nu(\mathbf{p}) \times R_i$. Donc de ce point de vue, toute hypothèse conduisant à supposer que les consommateurs individuels forment leurs choix sur la base d'une même utilité homothétique est compatible avec l'idée de consommateur représentatif.

Une autre façon de présenter le problème de l'agrégation est de constater l'existence de substitutions agrégées et d'adopter un modèle agrégé qui en rende compte à ce niveau, sans référence aux comportements individuels. Un tel modèle a, par construction, le défaut de ne pas se référer à des comportements individuels élémentaires. Cependant, il a le mérite de rendre compte de phénomènes dont on peut tester l'existence au niveau agrégé concerné, c'est-à-dire celui auquel travaille l'observateur qui met en évidence de telles substitutions. La figure V.1 illustre les substitutions à l'œuvre dans un supermarché réel sur des yaourts de marques concurrentes et pour un même packaging de 4 pots. Au début de la période, une des deux marques est bien établie dans les rayons du magasin tandis que l'autre est nouvelle à la vente. Après un temps d'acclimatation se traduisant par une augmentation progressive des achats de la nouvelle marque, les deux produits entrent en concurrence et apparaissent, jusqu'à un certain point, comme substituables : lorsque les prix de l'un des deux produits augmentent par rapport à ceux de l'autre produit, les ventes du premier diminuent tandis que celle de l'autre augmentent. Ainsi, à ce niveau d'agrégation, des substitutions sont à l'œuvre.

FIGURE V.1 – Prix relatifs et quantités écoulées relatives de deux packs de quatre yaourts vendus dans un point de vente de la Grande distribution



Lecture : les prix relatifs correspondent au rapport de prix bien(1)/bien(2) (axe de gauche) ; les quantités relatives correspondent au même ratio, pour le nombre d'articles vendus (axe de droite). Données hebdomadaires pour un point de vente de la Grande distribution et deux marques de yaourts concurrentes sur les années 2007 à 2009.

Un modèle agrégé au niveau du magasin et pour les yaourts qui y sont vendus permet de rendre compte de ce mécanisme : tout se passe comme s'il existait un consommateur représentatif (i.e. agrégé, moyen) qui achetait l'ensemble des packs de quatre yaourts des deux marques étudiées et que ce consommateur répartissait ses achats entre les deux marques en réagissant à leurs prix relatifs. Les trajectoires conjointes des prix et des quantités des deux packs de yaourts *révèlent* l'existence de substitutions. Un tel consommateur représentatif n'a finalement qu'une existence statistique, mais celle-ci peut se révéler pertinente selon ce que l'on cherche à restituer par le modèle que l'on adopte et *in fine*, par les statistiques auxquelles on s'intéresse. Comme l'indique Triplett (2001), dès qu'on veut rendre compte du fait qu'à une baisse de prix correspond *généralement* une hausse des quantités achetées et ce, pour des produits agrégés, l'usage de la théorie du consommateur s'impose car elle constitue un cadre apte à *modéliser* de tels phénomènes. Ceci ne signifie pas que l'on considère que la théorie soit juste (en particulier au niveau individuel), mais simplement qu'elle offre un cadre de description commode pour rendre compte de cette sorte de phénomènes, qu'on sait par ailleurs essentiellement vérifiés empiriquement. Ce mode de pensée n'entre d'ailleurs pas en contradiction avec les critiques émises par Deaton (1998) sur l'usage de l'indice à utilité constante, un peu rapidement prôné par les économistes. La critique de Deaton sur l'usage de l'indice à utilité constante tient au fait que, selon lui, le bien-fondé d'un tel indice repose sur un ensemble de conventions qui, mises bout-à-bout, ne sont pas davantage réalistes que celles sur lesquelles reposent les argumentaires en faveur d'autres approches des indices de prix. Quelle que soit l'optique retenue pour justifier l'usage de tel ou tel indice, la mesure reste une construction intellectuelle qui s'approche d'une réalité mais n'en restitue jamais toute la complexité. Par exemple, l'impossibilité d'agréger les préférences, hormis sous des hypothèses très restrictives et difficilement vérifiables en pratique, affaiblit les raisonnements en faveur de l'usage de l'indice à utilité constante reposant sur des arguments de vraisemblance par rapport aux comportements individuels réels.

V.3.2. Agrégation sectorielle

On considère un consommateur représentatif qui consomme un panier de biens décomposé en paniers sectoriels (un secteur est repéré par l'indice courant s : il y en a S ; i est un bien courant du secteur s : il y en a n_s et on note $i \in s$ dans les sommations) en optimisant son utilité, laquelle est construite comme la composition de deux utilités CES :

$$U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_S) = \left(\sum_{s=1}^{S} \beta_s \left[\sum_{i \in s} \alpha_{si} q_{si}^{\rho_s} \right]^{\frac{\rho}{\rho_s}} \right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{V.41}$$

On note $\phi_s(\mathbf{q}_s) = \left[\sum_{i \in s} \alpha_{si} q_{si}^{\rho_s}\right]^{\frac{1}{\rho_s}}$. Avec ces notations, l'utilité (V.41) s'écrit :

$$U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_S) = \left(\sum_{s=1}^{S} \beta_s \phi_s^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{V.42}$$

L'utilité ainsi écrite est faiblement séparable [15] au sens de Strotz (1957), Gorman (1959), Strotz (1959) et Sato (1967). Moyennant quoi, l'optimisation de (V.41) peut se réaliser en deux étapes (voir [16] Brown & Heien (1972)) :

(i) Optimisation sectorielle de $\mathbf{q}_s$ sous contrainte budgétaire d'une dépense exogène R_s :

$$\mathbf{q}_s(R_s) = \underset{\mathbf{q}}{\mathrm{argmax}} \{\phi_s(\mathbf{q}) | \mathbf{p}_s.\mathbf{q} = R_s\} \tag{V.43}$$

(ii) Calcul des dépenses sectorielles en réintroduisant les expressions de (V.43) dans (V.41). L'optimisation de seconde étape est réalisée sur les budgets sectoriels sous contrainte que la somme des budgets sectoriels, exogènes en première étape, soit égale à un budget total R exogène au problème :

$$\mathbf{R}(R) = \underset{R_1,\ldots,R_S}{\mathrm{argmax}} \left\{ U\left(\mathbf{q}_1(R_1), \ldots, \mathbf{q}_S(R_S)\right) | \sum_{s=1}^{S} R_s = R \right\} \tag{V.44}$$

les expressions des $\mathbf{q}_s(R_s)$ correspondant à celles figurant dans l'expression (V.43) et $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_S)$ étant le vecteur des allocations budgétaires sectorielles optimales.

Brown & Heien (1972) montrent que la demande Marshalienne x_{si} issue de l'optimisation de première étape (i) ci-dessus s'écrit ($i \in \{1, \ldots, n_s\}$) :

$$x_{si}(\mathbf{p}, R_s) = \left(\frac{\alpha_{si}}{p_{si}}\right)^{\varepsilon_s} \Omega_s^{-1} R_s$$

où

$$\Omega_s = \sum_{j \in s} \left(\frac{\alpha_{sj}}{p_{sj}}\right)^{\varepsilon_s} p_{sj} \tag{V.45}$$

On note que Ω_s ne dépend que du vecteur de prix $\mathbf{p}_s$ du secteur s (et des paramètres caractéristiques de ce secteur).
Tandis que la dépense sectorielle optimale R_s, issue de l'étape (ii) ci-dessus vaut :

$$R_s = \frac{\beta_s^{\varepsilon} \Omega_s^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}}}{\sum_{r=1}^{S} \beta_r^{\varepsilon} \Omega_r^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_r - 1}}} R \tag{V.46}$$

Les paramètres ε_s et ε sont respectivement les (valeurs absolues des) élasticités de substitution intra et extra-sectorielles. Explicitement, $\rho_s = 1 - \frac{1}{\varepsilon_s}$ et $\rho = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$.

15. On dit qu'une fonction d'utilité est faiblement séparable lorsque, en reprenant les notations du texte, $U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_S)$ est de la forme $F(f_1(\mathbf{q}_1), \ldots, f_S(\mathbf{q}_S))$ où les f_s ($s \in \{1, \ldots, S\}$) sont des fonctions réelles et F est une fonction réelle opérant sur $\mathbb{R}^S$.

16. Une démonstration de cette propriété est proposée dans (Green 1964).

Pour calculer l'utilité indirecte, on réintroduit ces expressions dans (V.41). Après quelques développements, on montre que [17] :

$$v(\mathbf{p}, R) = R \left\{ \sum_{s=1}^{S} \beta_s^{\varepsilon} \Omega_s^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}} \right\}_{\{\mathbf{p}\}}^{\frac{1}{\varepsilon - 1}}$$

La fonction de dépense s'obtient par inversion de la relation précédente :

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u} \left\{ \sum_{s=1}^{S} \beta_s^{\varepsilon} \Omega_s^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}} \right\}_{\{\mathbf{p}\}}^{-\frac{1}{\varepsilon - 1}}$$

La fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire vaut $e(\mathbf{p}, v(\boldsymbol{\pi}, R))$, soit :

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \left\{ \frac{\sum_{s=1}^{S} \beta_s^{\varepsilon} [\Omega_s(\mathbf{p}_s)]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}}}{\sum_{s=1}^{S} \beta_s^{\varepsilon} [\Omega_s(\boldsymbol{\pi}_s)]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}}} \right\}^{-\frac{1}{\varepsilon - 1}}$$

On peut remarquer que $\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R)$ s'écrit :

$$\mu(\mathbf{p}; \boldsymbol{\pi}, R) = R \left\{ \sum_{s=1}^{S} \theta_s(\boldsymbol{\pi}_s) \left[\frac{\Omega_s(\mathbf{p}_s)}{\Omega_s(\boldsymbol{\pi}_s)} \right]^{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_s}} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

où

$$\theta_s(\boldsymbol{\pi}_s) = \frac{\beta_s^{\varepsilon} [\Omega_s(\boldsymbol{\pi}_s)]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_s - 1}}}{\sum_{r=1}^{S} \beta_r^{\varepsilon} [\Omega_r(\boldsymbol{\pi}_r)]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon_r - 1}}} \tag{V.47}$$

est, en vertu de la relation (V.46), le poids de secteur s dans la dépense de consommation d'ensemble. Or,

$$\left[\frac{\Omega_s(\mathbf{p}_s)}{\Omega_s(\boldsymbol{\pi}_s)} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_s}} = \left[\frac{\sum_{j \in s} \alpha_{sj} \left(\frac{p_{sj}}{\alpha_{sj}} \right)^{1-\varepsilon_s}}{\sum_{k \in s} \alpha_{sk} \left(\frac{\pi_{sk}}{\alpha_{sk}} \right)^{1-\varepsilon_s}} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_s}}$$

est l'indice à utilité constante CES du secteur s (pour une élasticité de substitution ε_s – voir relation V.40). Finalement, l'indice à utilité constante associé à l'ensemble du modèle à utilité à niveaux imbriqués est :

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}; \varepsilon) = \left\{ \sum_{s=1}^{S} \theta_s(\boldsymbol{\pi}_s) I_{[CES],s}(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\pi}_s; \varepsilon_s)^{1-\varepsilon} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{V.48}$$

17. La notation du vecteur de prix en indice entre crochets signifie que les fonctions des vecteurs de prix figurant dans l'expression sont prises en ce vecteur de prix.

où $I_{[CES],s}$ est l'indice CES du secteur s.

Ce résultat est important car il généralise le principe de l'agrégation de Laspeyres dans le cas général où tous les biens sectoriels sont substituables d'une manière quelconque (identique pour tous les biens) au sein de secteurs élémentaires et où tous les secteurs sont substituables entre eux d'une manière quelconque (identique pour tous les secteurs). Nous allons maintenant examiner la compatibilité de ce résultat avec des résultats précédemment obtenus et en dégager quelques conséquences.

- Il est tout d'abord intéressant d'étudier le passage à la limite de cette expression lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce cas correspond à la situation dans laquelle les biens de deux secteurs différents ne sont pas substituables. Dans ce cas, l'expression précédente a pour limite :

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}; \varepsilon) = \sum_{s=1}^{S} \theta_s(\boldsymbol{\pi}_s) I_{[CES],s}(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\pi}_s; \varepsilon_s)$$

  Ainsi, l'indice agrégé apparaît comme une agrégation de Laspeyres des indices sectoriels élémentaires, ces derniers étant caractérisés par une élasticité de substitution intra-sectorielle quelconque.
- Un autre cas mérite qu'on s'y arrête : celui où $\varepsilon \to 1$. Dans ce cas, on sait que l'indice CES dégénère en un indice de Laspeyres géométrique. On montre, en prenant la limite de l'expression (V.48) pour $\varepsilon \to 1$, que dans ce cas,

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}; \varepsilon) = \prod_{s=1}^{S} \left\{ I_{[CES],s}(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\pi}_s; \varepsilon_s) \right\}^{\theta_s}$$

  où θ_s coïncide avec les exposants de la fonction d'utilité de Cobb-Douglas agrégeant les différents secteurs élémentaires. Là encore, les élasticités intra-sectorielles sont quelconques.

On peut enfin utilement noter que la formule d'agrégation (V.48) possède elle-même de bonnes propriétés de symétrie. En particulier, considérons le cas où les secteurs sont substituables avec une élasticité ε unique et où, pour le calcul, les secteurs sont répartis en deux groupes S_1 et S_2. Ces deux groupes sont donc par construction substituables avec une élasticité agrégée égale à ε. Dans ce cas, le calcul artificiel où les biens sont séparés en deux groupes substituables devrait donner un résultat similaire à un calcul en une étape. Montrons que c'est bien le cas.
Chaque groupe S_i ($i \in \{1, 2\}$) pèse θ_i dans la dépense totale et chaque secteur s du groupe i pèse θ_s^i. Dans un calcul séparé, l'indice du groupe i vaut :

$$I_{[CES],S_i} = \left(\sum_{s \in S_i} \theta_s^i {I_{[CES],s}^i}^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{V.49}$$

Si le calcul avait été fait en une seule étape, l'indice d'ensemble aurait été :

$$I_{[CES],S_1 \bigcup S_2} = \left(\sum_{i \in \{1,2\}} \sum_{s \in S_i} \theta_i \theta_s^i \left\{ I_{[CES],s}^i \right\}^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Ce dernier indice s'écrit aussi

$$I_{[CES],S_1 \bigcup S_2} = \left(\theta_1 I_{[CES],S_1}^{1-\varepsilon} + \theta_2 I_{[CES],S_2}^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

où les $I_{[CES],S_i}$ correspondent aux indices obtenus en calcul séparé (V.49). Ainsi, la formule d'agrégation est compatible pour des agrégations intermédiaires.
A noter que ce modèle peut s'appliquer dans la modélisation de substitutions intertemporelles (Sillard & Wilner 2015).

V.4. Quelques autres enseignements de la théorie du consommateur sur le calcul des indices de prix

V.4.1. L'introduction de nouveaux produits sur le marché

Ce paragraphe explore les enseignements de la théorie du consommateur sur l'indice des prix lorsqu'un nouveau bien entre sur le marché tandis que le bien précédent reste disponible à la vente. On suppose ici que le marché ne comprend que deux biens. Le modèle proposé ici permet, sous réserve d'observer la part des deux biens dans la dépense de consommation des ménages une fois le nouveau bien entré sur le marché, de calculer une variation d'indice lors de l'entrée du nouveau bien sur le marché, sur le principe d'un indice à utilité constante. Ce modèle a été utilisé par l'Insee pour traiter les conséquences de la création du timbre vert de la poste en octobre 2011. Cette nouvelle tarification s'ajoutait en effet à l'offre existante, pour le courrier rapide, et entrait en concurrence avec cette dernière, le prix du timbre vert étant inférieur de 3 centimes à celui du timbre rapide. A noter que ce modèle particulier n'est en revanche pas utilisé, généralement, dans l'indice des prix français, ce dernier étant un indice de Laspeyres à panier fixe annuel.

On considère un panier à deux biens (1) et (2) et deux périodes t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$). On note D^{t_i} la dépense (observée) en période (i) ($i \in \{1, 2\}$). Le consommateur peut, en période t_1, acheter uniquement le bien (1) ; en période t_2, il peut acheter les deux biens. Le prix des biens est repéré à l'aide d'un vecteur de prix $\mathbf{p}^{t_i}$ pour la période t_i. Ainsi, $p_k^{t_i}$ désigne le prix du bien k ($k \in \{1, 2\}$) à la période t_i ($k^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{p}^{t_i}$).
On suppose que le consommateur forge ses choix en optimisant son utilité sous contrainte de dépense, cette dernière étant supposée exogène. La forme de la

fonction d'utilité est commune aux deux périodes et correspond à une utilité CES :

$$u(\mathbf{q}) = (\alpha q_1^\rho + (1-\alpha) q_2^\rho)^{1/\rho}$$

En première période, le consommateur ne peut consommer que le bien (1). Il dépense D^{t_1}. Le prix du bien (1) est $p_1^{t_1}$. La quantité consommée est :

$$x_1\left[p_1^{t_1}, D^{t_1}\right] = \frac{D^{t_1}}{p_1^{t_1}} \tag{V.50}$$

et l'utilité qu'il en tire est :

$$\bar{u} = \alpha^{1/\rho} \frac{D^{t_1}}{p_1^{t_1}} \tag{V.51}$$

Cette relation n'est valable que pour [18] $\rho > 0$ (on rappelle que $\rho < 1$). En effet, si $\rho \leqslant 0$, alors l'utilité n'est pas définie pour une quantité consommée de bien 2 nulle.

En deuxième période t_2, il peut consommer le bien (1) et en particulier substituer une consommation de bien (2) à une consommation de bien (1). On fait, jusqu'à nouvel ordre, l'hypothèse que le prix du bien (1) est identique (i.e.constant) aux deux périodes. Sans changement de prix pour le bien (1) et à dépense constante, le consommateur substitue effectivement une consommation de bien (2) à celle de bien (1) : la demande de bien (1) devient [19], en vertu de la relation (V.23) :

$$x_1\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right] = \frac{D^{t_1}}{p_1^{t_1}} \frac{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r}{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r} \tag{V.52}$$

La demande résultante est inférieure à $x_1\left[p^{t_1}, D^{t_1}\right]$ donnée par (V.50) puisque le coefficient $\frac{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r}{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r}$ est positif et inférieur à 1.

La demande de bien (2) est positive :

$$x_2\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right] = \frac{D^{t_1}}{p_2^{t_2}} \frac{(1-\alpha) \left(\frac{p_2^{t_2}}{\alpha}\right)^r}{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r} \tag{V.53}$$

Quelle que soit la valeur $r \in]-\infty, 1[$, la quantité de bien (1) consommée diminue dés que le bien (2) apparaît (à niveau de dépense fixée et pour un prix du bien (1) inchangé).

L'utilité (indirecte) associée est :

$$v\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right] = \frac{D^{t_1}}{\left\{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{\alpha}\right)^r\right\}^{1/r}}$$

18. Ceci correspond à une élasticité de substitution $\varepsilon > 1$.
19. $r = \frac{\rho}{\rho - 1}$

Elle est à comparer au niveau d'utilité atteint en première période : $\bar{u} = \alpha^{1/\rho}\dfrac{D^{t_1}}{p_1^{t_1}} = D^{t_1}\left\{\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r\right\}^{-1/r}$. Or

$$\bar{u} \leqslant v\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{r}\ln\left\{\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r\right\} \leqslant -\frac{1}{r}\ln\left\{\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r\right\}$$

Le sens de l'inégalité dépend uniquement du signe de r : comme $\ln\left\{\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r\right\} \leqslant \ln\left\{\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r\right\}$ (l'inégalité étant saturée lorsque $\alpha = 1$), $\bar{u} \leqslant v\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right]$ pour $r < 0$. Réciproquement, $\bar{u} > v\left[\mathbf{p}^{t_2} = (p_1^{t_1}, p_2^{t_2}); D^{t_2} = D^{t_1}\right]$ pour $r > 0$.
Or nous avons fixé la condition $\rho > 0$ plus haut, laquelle est équivalente à $r < 0$. Par conséquent, dans ce modèle, l'introduction d'un nouveau bien sur le marché sans suppression du bien 1 augmente l'utilité du consommateur (pourvu naturellement que le bien (2) soit effectivement consommé en deuxième période).

On observe, entre les instants t_1 et t_2, le passage du poids, dans la dépense totale, des biens consommés de $(1,0)$, en t_1, à $(\kappa^{t_2}, 1-\kappa^{t_2})$, en t_2. A l'aide des fonctions de demande (V.52) et (V.53), nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\alpha\left(\dfrac{p_1^{t_2}}{\alpha}\right)^r}{\alpha\left(\dfrac{p_1^{t_2}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\dfrac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r} - \kappa^{t_2} & = & 0 \\ \dfrac{(1-\alpha)\left(\dfrac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r}{\alpha\left(\dfrac{p_1^{t_2}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\dfrac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r} - (1-\kappa^{t_2}) & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux fonctions de demandes des biens (1) et (2) sont complémentaires. Elles conduisent à la même relation unique :

$$\alpha(1-\kappa^{t_2})\left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha}\right)^r - \kappa^{t_2}(1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r = 0 \qquad \text{(V.54)}$$

Concrètement, le fait que les deux relations précédentes aboutissent à une relation unique implique que les observables (les prix et κ^{t_2}) ne permettent pas, sans hypothèse complémentaire, d'identifier simultanément r et α.

Revenons à présent à l'indice des prix à utilité constante et abandonnons désormais l'hypothèse de constance du prix du bien (1) sur les deux périodes comparées. En tenant compte de la relation (V.37) et de l'expression de $\bar{u}$ (Eq. V.51), nous avons :

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}^{t_2}, \mathbf{p}^{t_1}; r) = \frac{\alpha}{p_1^{t_1}} \alpha^{-1/r} \left\{ \alpha \left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha} \right)^r + (1-\alpha) \left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha} \right)^r \right\}^{1/r} \tag{V.55}$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} I_{[CES]}(\mathbf{p}^{t_2}, \mathbf{p}^{t_1}; r) &= \left\{ \frac{\alpha \left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha} \right)^r}{\alpha \left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha} \right)^r + (1-\alpha) \left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha} \right)^r} \right\}^{-1/r} \\ &= \left\{ \frac{\alpha \left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha} \right)^r}{\alpha \left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha} \right)^r + (1-\alpha) \left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha} \right)^r} \right\}^{-1/r} \times \frac{p_1^{t_2}}{p_1^{t_1}} \end{aligned}$$

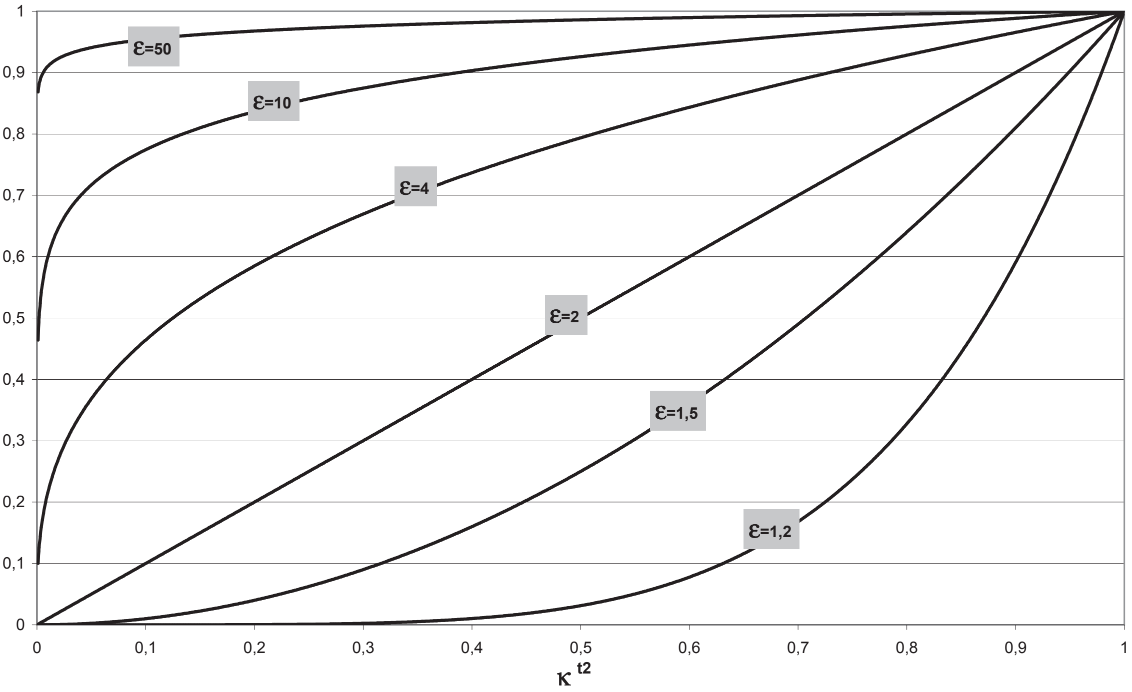
Finalement, comme $-1/r = 1/(\varepsilon - 1)$ où ε est l'élasticité de substitution entre les deux biens considérés, il vient :

$$I(\mathbf{p}^{t_2}; \mathbf{p}^{t_1}) = (\kappa^{t_2})^{1/(\varepsilon-1)} \times \frac{p_1^{t_2}}{p_1^{t_1}} \tag{V.56}$$

où κ^{t_2} est le poids en dépense de consommation du bien 1 en période t_2.
Nous avons vu précédemment qu'il convenait d'imposer la restriction $r < 0$. Ceci correspond à la restriction $\varepsilon > 1$. Ainsi, dans le modèle proposé, pour que l'utilité soit améliorée par l'apparition d'un nouveau produit, il faut que les deux biens disponibles en deuxième période soient substituables et que l'élasticité de substitution entre ces deux biens soit supérieure à 1. Dans un modèle où l'élasticité serait inférieure à 1, tous les biens sont nécessaires au consommateur à toute période. Il n'est donc pas possible, dans un tel modèle, qu'un bien ne soit pas consommé en première période, sauf à remettre en cause l'hypothèse de stabilité de la forme fonctionnelle de l'utilité entre les deux périodes.
Par construction, $\kappa^{t_2} \in [0, 1]$, $\left(\varepsilon > 1 \mapsto \frac{1}{\varepsilon - 1} \right)$ est une fonction décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc $(\kappa^{t_2})^{1/(\varepsilon-1)} \in [0, 1]$ pour tout $\varepsilon > 1$. Ainsi, dans ce modèle, l'introduction d'un nouveau produit sans variation du prix du bien existant précédemment (lequel est maintenu à la vente) se traduit par une baisse des prix d'autant plus forte que le nouveau produit pèse dans la dépense consacrée à l'achat des deux biens et, à poids de dépense donné, d'autant moins forte que les biens sont substituables [20].
Le tracé du coefficient $(\kappa^{t_2})^{1/(\varepsilon-1)}$ est proposé à la figure (V.2) pour quelques valeurs de ε.

20. En réalité, sur ce dernier aspect de la dépendance de l'évolution des prix à ε, le raisonnement à κ^{t_2} donné n'offre qu'une vue tronquée de l'influence de ε dans l'effet de l'introduction du nouveau produit sur les prix, car ε intervient aussi dans la valeur de κ^{t_2}. Notamment, plus les biens sont substituables, plus κ^{t_2} va être faible (à système de prix donné) et donc, plus la baisse des prix associée à l'introduction du nouveau bien sera forte.

FIGURE V.2 – Tracé du coefficient $(\kappa^{t_2})^{1/(\varepsilon-1)}$ en fonction de κ^{t_2} pour différentes valeurs de ε (κ^{t_2} est le poids, en période t_2, du bien vendu sur les deux périodes t_1 et t_2 – voir relation V.56)



Une autre façon de traiter les produits entrants est de leur affecter un prix fictif en période t_1 (la période où ils sont absents du panier de biens consommés), de sorte que l'indice des prix en période t_2 coïncide avec ce qu'il aurait été si le bien manquant avait été consommé en période t_1 au prix fictif, toutes choses étant égales par ailleurs.
Dans l'exemple considéré, l'indice effectif est celui donné par la relation (V.55). Notons $\tilde{p}_2^{t_1}$ le prix fictif du bien (2) (i.e. manquant) en période t_1. Si le bien (2) avait été consommé à ce prix en période t_1, toutes choses étant égales par ailleurs, l'indice des prix aurait été, d'après la relation (V.40) :

$$I_{[CES]}(\mathbf{p}^{t_2}, \mathbf{p}^{t_1}; r) = \frac{\left(\alpha\left(\frac{p_1^{t_2}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{p_2^{t_2}}{1-\alpha}\right)^r\right)^{1/r}}{\left(\alpha\left(\frac{p_1^{t_1}}{\alpha}\right)^r + (1-\alpha)\left(\frac{\tilde{p}_2^{t_1}}{1-\alpha}\right)^r\right)^{1/r}}$$

Tout se passe comme si, du point de vue de l'indice, nous passions d'un système de prix $(p_1^{t_1}, p_2^{t_1} = +\infty)$ à $(p_1^{t_2}, p_2^{t_2})$, le prix fictif du bien (2) en période t_1 étant infini. En effet, $r < 0$, donc :

$$(1-\alpha)\left(\frac{\tilde{p}_2^{t_1}}{1-\alpha}\right)^r = 0 \Longleftrightarrow p_2^{t_1} = +\infty$$

V.4.2. Préférences homothétiques et faits empiriques

Nous avons vu que dans certains cas, il pouvait être utile de faire l'hypothèse que les préférences sont homothétiques (voir page 57). Cette hypothèse n'est toutefois pas anodine, comme on a pu le remarquer au cours de ce texte. De plus, les faits stylisés disponibles suggèrent plutôt que l'homothéticité des préférences n'est pas vérifiée dans le cas général.

L'homothéticité des préférences implique que l'indice de prix ne dépend pas du niveau d'utilité associé à la consommation du panier de biens considéré. Toutes les utilités CES sont homothétiques (y compris les utilités de Léontief et de Cobb-Douglas). En revanche, les utilités présentées au paragraphe V.1.3. ne sont pas homothétiques et l'indice de prix résultant dépend donc du niveau d'utilité considéré (ou du niveau de dépense). Considérons la demande Marshalienne $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ lorsque u est homothétique, c'est-à-dire qu'elle se décompose en $u = h \circ g$ où h est monotone croissante et g est homogène de degré 1. Par hypothèse,

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \underset{\mathbf{q}}{\operatorname{argmax}} \{u(\mathbf{q}) | \mathbf{p}.\mathbf{q} = R\}$$

Le point en lequel le programme précédent est maximal est aussi celui en lequel g est maximal, sous les mêmes contraintes puisque h est monotone croissante ; par changement de variable $\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{R}$, on a :

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \underset{R\tilde{\mathbf{q}}}{\operatorname{argmax}} \{g(R\tilde{\mathbf{q}}) | \mathbf{p}.\tilde{\mathbf{q}} = 1\}$$

Comme g est homogène de degré 1, le point en lequel $g(R\tilde{\mathbf{q}})$ atteint sont maximum est aussi celui en lequel $Rg(\tilde{\mathbf{q}})$ atteint son maximum, soit aussi celui en lequel $g(\tilde{\mathbf{q}})$ atteint son maximum. Il en découle que :

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R \operatorname*{argmax}_{\tilde{\mathbf{q}}} \{g(\tilde{\mathbf{q}}) | \mathbf{p}.\tilde{\mathbf{q}} = 1\}$$

Le point en lequel g atteint son maximum, est, pour les mêmes raisons que précédemment, celui en lequel u atteint son maximum sur le même espace de contraintes. Finalement,

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R \operatorname*{argmax}_{\mathbf{q}} \{u(\mathbf{q}) | \mathbf{p}.\mathbf{q} = 1\}$$

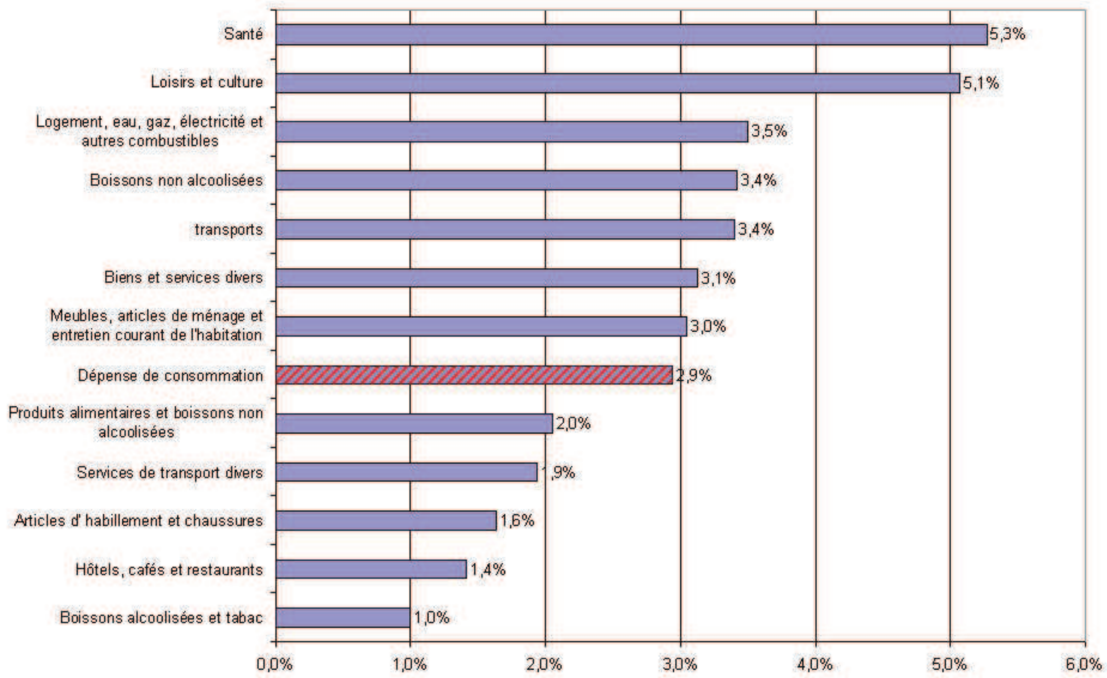
En d'autres termes, si u est homothétique, la demande Marshalienne est proportionnelle au revenu :

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1) \tag{V.57}$$

Cette propriété est importante car elle peut être testée en pratique. Elle indique que la quantité de biens d'un certain type consommée croît proportionnellement au revenu. Les travaux sur les courbes d'Engel indiquent plutôt une situation différente. En effet, les données montrent qu'à long terme, le revenu augmentant, le volume de consommation des biens alimentaires croît moins vite que le revenu, tandis qu'à l'inverse, le volume de consommation des biens à plus forte valeur ajoutée croît plus vite que le revenu. Afin d'illustrer cette propriété, la figure V.3 propose le tracé de la croissance moyenne annuelle, en volume, qu'ont connue les différents secteurs de la consommation des ménages entre 1959 et 2011. Figure également, la croissance de la dépense en volume.
L'examen de la figure V.3 montre que la dépense de consommation augmentant, la consommation se déplace vers des biens et services à plus haute valeur ajoutée.

Par conséquent, l'hypothèse de préférences homothétiques semble plutôt invalidée par les faits, au moins s'agissant du long terme. La conséquence de cette situation sur les indices de prix n'a pas véritablement été tirée. Quoiqu'il en soit, un moyen de boucler le raisonnement consisterait à partir des fonctions de demande observées – lesquelles peuvent donc ne pas être proportionnelles au montant de dépense total – puis à dériver un indice de prix cohérent avec ces fonctions de demandes, conformément à l'exposé proposé au paragraphe V.1.. Une autre solution serait d'utiliser un indice de Törnqvist (voir paragraphe IV.5.). Mais dans les deux cas, les limites du concept d'indice à utilité constante exposées au paragraphe V.3. perdurent.

FIGURE V.3 – Croissance annuelle moyenne des volumes de consommations sectorielles entre 1959 et 2011



Source : Insee, comptes nationaux

Chapitre VI

Conclusion : construction théorique d'un indice des prix à la consommation et application au cas de l'IPC français

À l'issue de ces quelques pages sur les indices de prix à la consommation, il est utile de poser la question de la construction d'un indice de prix en tant qu'outil de mesure de l'évolution des prix. Sans entrer dans un formalisme excessif, il est commode de se référer aux étapes que les métrologistes ont identifiées permettant de passer d'un concept à mesurer à une réalisation de sa mesure (Joint Comitee for Guides in Metrology 2012).

On conviendra que le vocabulaire nécessite d'être adapté au cas des indices de prix à la consommation.

Globalement, il est d'usage de distinguer trois étapes :

1. Définition d'un concept *idéal* qui, en tant que tel, n'est généralement pas observable mais dont l'existence constitue un postulat des théories classiques en vigueur. L'apport des théories est en général de soutenir l'enchaînement logique des étapes successives de construction de l'objet à mesurer. Par exemple, en mécanique, on postule l'existence d'un référentiel Galiléen – i.e. inertiel – pour exprimer les équations de la dynamique des corps. Dans cet exemple, le référentiel galiléen est le concept idéal de référentiel.
2. Définition d'un concept *conventionnel* qui complète le concept idéal par un certain nombre de conventions, comme par exemple, l'adoption de valeurs numériques pour des constantes qui entrent en jeu dans l'expression des théories faisant appel au concept idéal précédent. Pour poursuivre l'exemple des référentiels en mécanique, on peut citer l'adoption d'une valeur pour la constante de la gravitation (G) ou de son produit par

la masse de la terre ou du Soleil, l'adoption d'une valeur pour la vitesse de la lumière dans le vide (IERS 2010), etc. . .

3. Adoption d'une *réalisation* du concept conventionnel, soit par application d'une définition, soit par la donnée de valeurs numériques de grandeurs observées. Dans les deux cas, la réalisation conduit à l'obtention de valeurs numériques [1] qui *réalisent* les concepts idéaux et conventionnels précédents. Par exemple, la liste des coordonnées géographiques (i.e. GPS) d'un ensemble de points de la surface terrestre réalise un référentiel terrestre conventionnel particulier.

VI.1. La construction de l'IPC français

Dans ce paragraphe, nous déclinons les trois étapes précédentes dans le cas de l'IPC français. Nous discutons des choix retenus s'agissant des notions de concepts idéaux et conventionnels adoptés pour les IPC en section VI.2..

VI.1.1. Le concept idéal d'IPC

On suppose l'existence d'un consommateur représentatif, c'est-à-dire un être abstrait qui consomme l'ensemble de la consommation des ménages sur un territoire économique donné et sur des périodes élémentaires de durée fixe. La consommation des ménages à laquelle on fait référence est la consommation finale effective des ménages [2], restreinte à sa partie marchande, c'est-à-dire celle qui fait l'objet de transactions monétaires librement consenties par l'offreur et l'acheteur (consommation dite « marchande »). Le territoire économique indique le lieu d'achat et non le lieu de résidence des ménages. Il est défini conformément aux concepts de la Comptabilité nationale (Eurostat 2013). Le consommateur représentatif est « price taker ».

Le consommateur représentatif consomme des produits qui lui permettent de couvrir des besoins de consommation.

On distingue les périodes élémentaires fortement comparables et les autres périodes, faiblement comparables. Les besoins de consommation sont, entre deux périodes fortement comparables, identiques en nature. En revanche, le nombre d'unités de besoin consommées diffère. Le consommateur, à chaque période, forge ses choix de consommation (c'est-à-dire détermine le nombre d'unités de besoin consommées) en maximisant son utilité sous contrainte budgétaire. La fonction d'utilité qui caractérise ses choix est stable entre deux périodes fortement comparables. Le budget consacré à la consommation est supposé exogène (il va dépendre des salaires reçus et de l'épargne disponible).

1. *valeurs* issues d'un *mesurage* pour reprendre les termes de métrologie.
2. au sens de la Comptabilité nationale (Eurostat 2013)

Le concept idéal d'indice des prix à la consommation est l'évolution du budget que le consommateur représentatif doit consentir entre une période de référence et une période courante fortement comparables pour maintenir son utilité constante.

Par chaînage, l'indice chaîné permet de comparer des périodes faiblement comparables.

Un besoin de consommation coïncide à tout instant avec un bien ou un service (i.e. un produit) vendu dans un point de vente[3] donné du territoire économique. En revanche, entre deux instants appartenant à deux périodes fortement comparables, le même besoin peut être couvert par deux produits différents, soit que les caractéristiques, de contenance notamment, ont pu évoluer (par exemple en raison de promotions fabricant), soit qu'un produit remplaçant a été sélectionné suite à l'abandon de la commercialisation du produit originel. Les deux produits couvrant le même besoin aux deux instants évoqués n'ont pas les mêmes caractéristiques et peuvent ne pas apporter le même niveau d'utilité au consommateur représentatif. Ainsi, un « ajustement qualité » est réalisé pour neutraliser, dans l'indice des prix, l'impact de la différence de qualité des produits sur le niveau d'utilité du consommateur de sorte que l'indice compare des prix d'unités de besoin à niveau constant de qualité.

Le mécanisme de remplacement ne s'applique pas aux périodes hors saison des produits soumis à des ventes saisonnières. Pour ces produits et à ces périodes, le prix est imputé de façon à ce que la trajectoire de prix d'ensemble soit celle qu'aurait connu l'indice ces mois-là, si les produits hors saison ne figuraient pas dans le panier. De la sorte, ces produits n'influent pas sur l'indice lorsqu'ils sont hors saison.

VI.1.2. Le concept conventionnel d'IPC

Les périodes comparées sont des mois. Au sein d'une année, le mois courant est comparé au mois de décembre de l'année précédente. Ces deux périodes sont considérées comme étant fortement comparables. Toutes les autres périodes sont considérées comme étant faiblement comparables. Par convention, on définit des unités de besoin « homogènes » et des unités de besoin « hétérogènes ». Les unités de besoins homogènes sont non substituables. Les unités de besoin hétérogènes sont substituables avec une élasticité de substitution unitaire. Les unités de besoin sont définies à l'échelle d'un marché élémentaire correspondant à un certain type de bien ou service pour une localisation géographique donnée. Au-delà du marché élémentaire considéré, les unités de besoin, hétérogènes, comme homogènes, sont non substituables.

3. au sens large, internet compris.

Pour les besoins de consommation achetés dans des points de vente physiques, le marché élémentaire épouse les contours d'une unité urbaine (i.e. une agglomération au sens de l'Insee). Le type de bien ou service correspond à une variété de produits (Insee 1998). Pour les produits achetés sur internet ou de manière centralisée, seule la dimension du type de bien est prise en considération pour la définition du marché élémentaire. Si le type de bien est homogène et ses prix peu dispersés (exemple : la baguette de pain), alors la variété est homogène, sinon elle est hétérogène (exemple : machines à laver le linge).

Pour chaque période fortement comparable, les poids en dépense de consommation des unités de besoin sont fondés sur les dépenses de consommation des ménages observées sur l'ensemble de l'année précédente.

VI.1.3. La réalisation française de l'IPC

L'IPC français est la réalisation de l'IPC conventionnel décrit ci-dessus. Sur le plan statistique, c'est une réalisation d'une variable aléatoire découlant des hypothèses précédentes et d'un sondage réalisé dans l'univers des unités de besoins de la consommation des ménages observées lors de l'année précédente. Dans les grandes lignes, ce sondage s'appuie sur une sélection par sondage aléatoire des unités urbaines, puis sur une sélection des produits par méthodes de quotas sur la double dimension de la nature des points de vente et de la nature des produits (variétés). Pour plus de détails sur ce sondage, le lecteur se reportera à Jaluzot & Sillard (2015).

Les unités de besoin (produit) suivies sont des variétés observées dans des points de vente des unités urbaines de l'échantillon. Dans un point de vente donné, au plus un seul produit est observé pour une variété. Les variétés sont des représentants des postes de la nomenclature internationale de fonctions de consommation COICOP[4]. Ces variétés sont définies par l'Insee à partir de sources professionnelles de façon à être représentatives des postes et de contour précis. Les biens et services observés au titre des unités de besoin sont observées un jour donné du mois de collecte IPC, lequel comprend 20 jours ouvrés. Il le sont dans des points de vente physiques par les enquêteurs de l'Insee ou des agents du réseau des prix.
Pour un produit suivi, toute variation de prix anormale au regard de celle des autres produits du même type est examinée dans le cadre d'un apurement manuel réalisé par les gestionnaires des sites prix des Directions régionales de l'Insee. Il en est de même à chaque fois qu'un produit fait l'objet d'un remplacement.

4. http://www.insee.fr/fr/methodes/default.asp?page=nomenclatures/coicop1998/coicop1998.htm

VI.2. Discussion

La première question à discuter est le choix de la définition du concept idéal d'indice de prix à la consommation. En effet, adosser l'IPC à un indice à utilité constante n'est pas une nécessité absolue. Des alternatives existent. Examinons-les.

a) Définir l'IPC comme la mesure d'une statistique *ad hoc*, comme par exemple le rapport du coût d'un panier de biens à deux périodes différentes (i.e. un indice de Laspeyres). Cette approche comporte plusieurs limites : d'abord elle n'est pas reliée à une cible d'indice indépendamment de l'échantillon retenu (que devient le concept si le panier est étendu ?) ; ensuite, elle ne permet pas de justifier le recours à d'autres formules de micro-indice que celle de Dutot (dans l'IPC français, on utilise aussi celle de Jevons) ; enfin, cette approche ne permet pas de justifier correctement la mécanique de remplacement (laquelle pourrait néanmoins se justifier statistiquement en tant qu'opération d'imputation d'une observation manquante) ni surtout celle de l'ajustement qualité.
b) Définir l'IPC comme la mesure de l'évolution tendancielle des prix qui affecterait en moyenne chaque produit de l'économie, chaque produit étant affecté d'une évolution qui s'écarte de la moyenne en raison d'un aléa qui lui est propre. Cette approche, non présentée dans ce texte, a longtemps prévalu dans l'esprit des statisticiens des prix (Malinvaud 1956) car elle repose finalement sur une modélisation très souvent adoptée dans d'autres productions statistiques. La faiblesse de cette approche réside dans sa difficulté à justifier l'usage de formules d'indices autres que celle de Carli ou, à la rigueur, celle de Laspyeres. Moyennant quoi, ce cadre de pensée reste, comme l'alternative précédente, très incomplet par rapport à l'emboîtement des règles de calcul des indices de prix modernes.

Au final, le cadre de pensée offert par l'indice à utilité constante s'avère être le plus satisfaisant : non que l'IPC, tel qu'il est défini, soit *l'indice à utilité constante* (appelé indice du coût de la vie – Cost of living index COLI –) auquel se réfère la théorie économique (Boskin et al. 1998). Mais plutôt que le cadre de pensée des indices à utilité constante est le mieux à même de permettre l'explicitation des hypothèses retenues tout en posant un cadre théorique cohérent permettant de justifier leur enchaînement.

La seconde question méritant qu'on s'y arrête est celle de l'intérêt de la construction proposée en section VI.1.. Celle-ci peut paraître à première vue un peu formelle. Elle est d'ailleurs perfectible, notamment s'agissant des frontières entre les trois séquences de la construction. Pour autant, la démarche a été mise au point par les métrologistes dans le but de pousser à expliciter comment une valeur numérique donnée à un objet qu'on cherche à mesurer découle d'une théorie d'ensemble et d'un jeu cohérent de conventions. Cette démarche est précisément conçue pour forcer à expliciter les hypothèses et à les inscrire dans le mode de raisonnement des sciences de la mesure, allant du général (la théorie) au particulier (le chiffre). Ce faisant, elle propose une démarche de construction tournée vers l'explicitation tandis que, en matière de statistiques économiques et sociales, l'implicite domine souvent et ce, par peur de l'écueil scientiste. Cet écueil est souvent mis en avant par les tenants d'une économie non formalisée au motif que l'économie est une science humaine et que son fonctionnement ne saurait se résoudre à quelques relations mathématiques. Mais ceci peut être dépassé : si on inscrit ici l'indice des prix dans le cadre conceptuel des indices à utilité constante, cela ne signifie pas pour autant qu'on cherche à mesurer *l'indice du coût de la vie*. En effet, celui-ci n'existe pas formellement sans hypothèses complémentaires (voir le paragraphe V.3.). Et se donner comme objectif de mesurer *l'indice du coût de la vie* sans exprimer (et donc relativiser) les hypothèses complémentaires requises correspondrait très certainement à une dérive scientiste. L'approche proposée dans la construction du paragraphe VI.1. est plus pragmatique. Elle épouse une démarche qui force à préciser ce qu'on mesure et les hypothèses sous-jacentes en les replaçant dans un schéma théorique homogène et complet. C'est ce qui donne sa pertinence à cette démarche dont la valeur ne repose pas sur une prétendue proximité à des comportements individuels non observables et non modélisables, mais sur sa faculté à favoriser l'explicitation des hypothèses sous-jacentes aux chiffres obtenus et leur inscription dans un cadre théorique d'ensemble cohérent.

Bibliographie

Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. & Solow, R. M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *Review of Economics and Statistics* **43**(3) : 225–250.

Balk, B. (1999). On Curing the CPI's Substitution and New Goods Bias, *The Ottawa Group Meeting*.

Balk, B. M. (1995). Price Index Theory : A Survey, *International Statistical Review* **63**(1) : 69–93.

Berthier, J. P. (2013). Introduction à la pratique des indices statistiques, *Document de travail : méthodologie statistique M0503*, Insee - DSDS.

Boskin, M. J., Dulberger, E. R., Gordon, R. J., Griliches, Z. & Jorgenson, D. W. (1998). Consumer Prices, the Consumer Price index, and the Cost of Living, *Journal of Economic Perspectives* **12**(1) : 3–26.

Brown, M. & Heien, D. (1972). The S-Branch Utility Tree : A Generalization of the Linear Expenditure System, *Econometrica* **40**(4) : 737–747.

Chauvet-Peyrard, A. (2013). Les indices de prix : de la théorie à la pratique, *Cours*, Ecole nationale de la statistique et de l'analyse de l'information.

Deaton, A. (1998). Getting Prices Right : What Should be Done ?, *Journal of Economic Perspectives* **12**(1) : 37–46.

Deaton, A. & Muelbauer, J. (1980). *Economics and consumer behavior*, Cambridge University Press.

Diewert, W. E. (1976). Exact and superlative index numbers, *Journal of Econometrics* **4**(2) : 115–145.

Diewert, W. E. (1995). Axiomatic and Economic Approches to Elementary Price Indexes, *Working paper 5104*, NBER.

Eichhorn, W. & Voeller, J. (1976). *Theory of the Price Index*, Springer-Verlag.

Eurostat (2013). European System of Accounts – ESA 2010, `ec.europa.eu/eurostat/documents/3859598/.../KS-02-13-269-EN.PDF`, European Commission.

Fisher, F. M. & Shell, K. (1972). *The Economic Theory of Price Indices : Two Essays on the Effects of Taste Quality and Technological Change*, Academic Press.

Gorman, W. M. (1959). Separable Utility and Aggregation, *Econometrica* **27**(3) : 469–481.

Green, H. A. J. (1964). *Aggregation in Economic Analysis*, Princeton University Press.

Hausman, J. (1981). Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss, *American Economic Review* **71**(4) : 662–676.

Hausman, J. (2003). Sources of Bias and Solutions to Bias in the Consumer Price Index, *Journal of Economic Perspectives* **17**(1) : 23–44.

Hulten, C. (1973). Divisia Index Numbers, *Econometrica* **41**(6).

Hurwicz, L. & Uzawa, H. (1971). On the Integrability of Demand Functions, *in* J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter & H. F. Sonnenschein (eds), *Preferences, Utility, and Demand*, Harcourt, pp. 114–148.

IERS (2010). *IERS Conventions 2010*, Internation Earth Rotation Service.

ILO, IMF, OECD, UNECE, Eurostat & The World Bank (2004). *Consumer price index manual : Theory and Practise*, International Labour Office.

Insee (1998). Pour comprendre l'indice des prix, *Insee-méthodes*, Insee.

Ivancic, L., Diewert, W. E. & Fox, K. J. (2011). Scanner data, time aggregation and the construction of price indexes, *Journal of Econometrics* **161** : 24–35.

Jaluzot, L. & Sillard, P. (2015). Échantillonnage des agglomérations de l'IPC pour la base 2015, `http://jms.insee.fr/files/documents/2015/S06_1_ACTE_V2_JALUZOT_JMS2015.PDF`, Journées de méthodologie statistique INSEE.

Joint Comitee for Guides in Metrology (2012). *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms*, Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

Laurent-Gengoux, P. (2006). Analyse des équations aux dérivées partielles, *Cours*, Ecole Centrale de Paris.

Lequiller, F. (1997). L'indice des prix à la consommation surestime-t-il l'inflation ?, *Economie et statistiques* **303** : 3–32.

Lequiller, F. & Blades, D. (2004). *Comptabilité nationale : Manuel pour étudiants*, Economica.

Léonard, I., Sillard, P., Varlet, G. & Zoyem, J.-P. (2015). Scanner data and quality adjustment, *The Ottawa Group Meeting*.

Malinvaud, E. (1950). Possibilités d'établissement d'un indice des prix des fruits et légumes frais, *Journal de la société statistique de Paris* **91**.

Malinvaud, E. (1956). L'agrégation dans les modèles économiques, *Cahiers du séminaire d'économétrie* (4) : 69–146.

Picard, P. (1998). *Éléments de microéconomie*, Montchrestien.

Piriou, J.-P. (1986). *L'indice des prix*, La découverte.

Rothwell, D. P. (1958). Use of Varying Seasonal Weights in Price index Construction, *Journal of the American Statistical Association* **53**(281) : 66–77.

Sato, K. (1967). A Two-Level Constant-Elasticity of Substitution Production Function, *Review of Economic Studies* **34** : 201–218.

Schultz, B. (1994). Choice of price index formulae at the micro aggregation level : the Canadian empirical evidence, *The Ottawa Group Meeting*.

Sillard, P. (2013). Les données de caisses : vers des indices à utilité constante ?, *Document de travail*, Insee - DSDS.

Sillard, P. & Wilner, L. (2015). Indices de prix à utilité constante et substitutions intermensuelles, *Revue économique* **66**(4) : 755–768.

Strotz, R. H. (1957). The Empirical Application of a Utility Tree, *Econometrica* **26**(2) : 269–280.

Strotz, R. H. (1959). The Utility Tree – A Correction and Further Appraisal, *Econometrica* **27**(3) : 482–488.

Triplett, J. E. (2001). Should the Cost-of-Living Index Provide the Conceptual Framework for a Consumer Price Index ?, *The Economic Journal* **111**(472) : F311–F334.

Valoni, A. (2002). *Une histoire de la Comptabilité nationale*, La découverte.

Varian, H. R. (1975). *Microeconomic Analysis*, The MIT Press.

Viglino, L. (2000). Le concept unificateur des indices de prix et proposition d'un nouvel indice, `http://jms.insee.fr/files/documents/2000/653_1-JMS2000_S3-7_VIGLINO(2).PDF`, Journées de méthodologie statistique INSEE.

Wilson, H. J. (2014). First-order PDEs, `http://www.ucl.ac.uk/~ucahhwi/LTCC/`, University College London.

Index

Série des documents de travail de la DSDS

F1705 : Effet d'un choc d'inflation sur le revenu disponible et ses composantes deux ans après : une approche par microsimulation - Anne-Lise Biotteau et Maëlle Fontaine

F1704 : Scanner data and quality adjustment - Isabelle Léonard, Patrick Sillard, Gaëtan Varlet et Jean-Paul Zoyem

F1703 : Les structures familiales en France : comparaison entre le recensement, l'enquête famille et logements et l'enquête emploi - Guillemette BUISSON et Aude LAPINTE

F1702 : Projections de la population active à l'horizon 2070 - Malik KOUBI et Anis MARRAKCHI

F1701 : Les taux marginaux effectifs de prélèvement pour les personnes en emploi en France en 2014 - Juliette FOURCOT et Michaël SICSIC

F1606 : Projections de population 2013-2070 pour la France : méthode et principaux résultats - Nathalie BLANPAIN et Guillemette BUISSON

F1605 : Les durées passées en famille monoparentale - Méthode d'estimation des durées et résultats - Vianney COSTEMALLE

F1604 : ESeG = European Socio economic Groups - Nomenclature socio-économique européenne - Monique MERON, Michel AMAR, Charline BABET, Milan BOUCHET-VALAT, Fanny BUGEJA-BLOCH, François GLEIZES, Frédéric LEBARON, Cédric HUGRÉE, Étienne PENISSAT et Alexis SPIRE

F1603 : Catégorie sociale d'après les déclarations annuelles de données sociales et catégorie sociale d'après le recensement : quels effets sur les espérances de vie par catégorie sociale ? Comparaison entre les déclarations annuelles de données sociales et les recensements de la population. Comparaison de méthodes d'estimation des espérances de vie - Vianney COSTEMALLE

F1602 : L'espérance de vie par catégorie sociale et par diplôme - Méthode et principaux résultats - Nathalie BLANPAIN

F1601 : Échantillonnage des agglomérations de l'IPC pour la base 2015 - Laurence JALUZOT et Patrick SILLARD

F1508 : Worker-firm matching and the family pay gap: Evidence from linked employer-employee data - Lionel WILNER

F1507 : Effet des nouvelles mesures sociales et fiscales sur le niveau de vie des ménages : méthodologie de chiffrage avec le modèle de microsimulation Ines - Mathias ANDRÉ, Marie-Cécile CAZENAVE, Maëlle FONTAINE, Juliette FOURCOT et Antoine SIREYJOL

F1506 : Nowcasting du taux de pauvreté par la micro-simulation - Maëlle FONTAINE et Juliette FOURCOT

F1505/376-501 : Bilan du projet EDP++ - division Camap et division Enquêtes et études démographiques

F1504 : Contrôles des rémunérations dans les déclarations annuelles de données sociales (DADS) - Une analyse exploratoire pour améliorer la détection des points atypiques - Claire JACOD

F1503 : Précision de l'enquête Patrimoine 2010 - Pierre LAMARCHE et Laurianne SALEMBIER

F1502 : Pourquoi l’indicateur de pauvreté en conditions de vie baisse malgré la crise économique ouverte en 2008 ? Jean-Louis PAN KÉ SHON

F1501 : Évolution de la population de la France entre 1981 et 2011 : contributions de la fécondité, de la mortalité, du solde migratoire et de la structure de la pyramide des âges - Catherine BEAUMEL et Pascale BREUIL-GENIER

F1410 : “Personal network” and retirement: Is retirement bad for friendship and good for family relationships ? Anne LAFERRÈRE

F1409 : Retraités mais pas en retrait : La retraite pousse-t-elle à de nouvelles activités ? Anne LAFERRÈRE

F1407 : Production "aval" de l'enquête emploi en continu EEC2 2013 - 20XX - Fabien GUGGEMOS

F1406 bis : La constitution de l'échantillon démographique permanent de 1968 à 2012 - Stéphane JUGNOT

F1405 (tome 1) : Hommes et femmes vivant en couple en 2009, 1999 et aux recensements précédents - Fabienne DAGUET

F1405 (tome 2) : Hommes et femmes vivant en couple en 2009, 1999 et aux recensements précédents - Fabienne DAGUET

F1404 : L’addition est-elle moins salée ? La réponse des prix à la baisse de TVA dans la restauration en France - Quentin LAFFÉTER et Patrick SILLARD

F1403 : Estimer les flux d’entrées sur le territoire à partir des enquêtes annuelles de recensement - Chantal BRUTEL

F1402 : Une rotation de la main d’œuvre presque quintuplée en 30 ans : plus qu’un essor des formes particulières d’emploi, un profond changement de leur usage - Claude PICART

F1401 : Calculs statistiques de stock et de flux sur la révision électorale 2012-2013 - Christelle RIEG