Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

ÉPREUVES ÉCRITES

Concours interne d'administrateur de
l'Institut national de la statistique et des études économiques
Année 2024

Partie 1 : Sciences sociales

Sujet : Ecole et inégalités

Partie 2 : Économie

Sujet : Vivons-nous actuellement la fin de la mondialisation ?

Concours interne d'administrateur de
l'Institut national de la statistique et des études économiques

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

Le sujet comporte 7 pages y compris celle-ci.

- Tous documents et appareils électroniques interdits.

- L'épreuve est constitutée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour la moitié de la note finale. Chaque partie contient plusieurs exercices ou problèmes indépendants. À l'intérieur de chaque exercice ou problème, certaines questions sont indépendantes. Le résultat d'une question peut être admis pour répondre aux suivantes.

- Il sera tenu compte de la présentation, de la pertinence et de la clarté des commentaires.

Partie 1: analyse et algèbre.

Problème.

Notations et définitions.

• Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Dans tout ce problème, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont dans K. On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont dans K.

• On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(K)$. On note I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(K)$.

• Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et pour tout $\lambda \in K$, on pose

$$E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ MX = \lambda X\}$$

et

$$\text{Im}_\lambda(M) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \text{ tel que } Y = (M - \lambda I_n)X\}.$$

• Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on appelle spectre de M l'ensemble des valeurs propres de M.
Le spectre de M est noté Sp(M).
Le rang de la matrice M est noté rg(M).

• Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(K)$ et si e est dans $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, on dit que e est **un vecteur propre commun** à A et à B si
$\star$ $e \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)}$.
$\star$ il existe $\lambda \in K$ tel que $Ae = \lambda e$.
$\star$ il existe $\mu \in K$ tel que $Be = \mu e$.

• Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(K)$, on pose $[A, B] = AB - BA$.

• Soit E un espace vectoriel sur K. Soient f et g deux endomorphismes de E. Soit $e \in E$.
On dit que e est **un vecteur propre commun** à f et à g si
$\star$ $e \neq 0_E$.
$\star$ il existe $\lambda \in K$ tel que $f(e) = \lambda e$.
$\star$ il existe $\mu \in K$ tel que $g(e) = \mu e$.

• Si f et g sont deux endomorphismes de E, on pose $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

• Si f est un endomorphisme de E, rg(f) désigne le rang de f.

Partie I: étude dans un cas particulier.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs suivants de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

1. (a) Calculer Au_1, Au_2 et Au_3.

(b) Déterminer le spectre de A et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

(d) Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale P telles que $A = P\Delta {}^tP$.

(e) La famille $\mathcal{F}$ contient-elle des vecteurs propres communs à A et B ?

2. (a) Exprimer B^2 comme une combinaison linéaire de I_3 et de B.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(B) = 0_3$. Montrer que si λ est une valeur propre de B, alors $P(\lambda) = 0$.

(c) Déterminer le spectre de B.

(d) Déterminer une base de $\text{Im}_2(B)$.

(e) La matrice B est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. (a) Déterminer une base de $E_1(A) \cap E_2(B)$.

(b) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

4. (a) Expliciter $[A, B]$.

(b) Montrer que la matrice C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II: étude dans un autre cas particulier.

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul et $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout polynôme P de E, on pose

$$f(P) = P' \qquad \text{et} \qquad g(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On note $\deg(P)$ le degré du polynôme P.

1. (a) Montrer que g définit un endomorphisme de E.

(b) Le réel 0 est-il valeur propre de g ?

(c) Montrer que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geq n$.

(d) Donner un vecteur propre de g de degré n.

2. Dans la suite du texte, $[\![1, 2n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq 2n$.
Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, on note

$$f^i = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ fois}}.$$

(a) Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f^i.

(b) Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme f^i.

3. Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur i pour que f^i et g possèdent un vecteur propre commun.

Partie III: condition nécessaire, condition suffisante.

Dans cette dernière partie, on suppose que $K = \mathbb{C}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note

$$\text{Ker}([A, B]) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ (AB - BA)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

On dit que les matrices A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$ s'il existe λ une valeur propre de A telle que

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B]).$$

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe un vecteur propre e commun à A et B.
   (a) Montrer que $e \in \mathrm{Ker}([A, B])$.
   (b) Montrer que le rang de $[A, B]$ est strictement inférieur à n.
2. Montrer que si $[A, B]$ est la matrice nulle, alors les matrices A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$: ainsi, il existe λ dans le spectre de A tel que
$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B]).$$
   (a) Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$.
   Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   (b) Prouver l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante: « pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple (φ, ψ) d'endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ. »

4. Démontrer la propriété $\mathcal{P}_1$.
5. Soit $n \geq 2$. Dans cette question, on suppose que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.
   On note $C = [A, B]$ et on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$. On considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Au = \lambda u$ et $\mathrm{Im}_0(C) = \mathrm{Vect}(Cu)$.
   (b) Montrer que
$$\mathrm{Im}_0(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A).$$
   (c) Montrer que
$$1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n-1.$$
   (d) Exprimer $[B, A - \lambda I_n]$ en fonction de C.
   (e) Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.
   Montrer que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.
   (f) Prouver l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Expliciter le résultat ainsi démontré en précisant si la condition trouvée pour l'existence d'un vecteur propre commun est nécessaire ou suffisante.
7. En utilisant la Partie II, construire deux endomorphismes, φ et ψ, d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) > 1$ et admettant un vecteur propre commun.
   Que dire alors de la condition trouvée dans la question précédente ?

Exercice.

Soit f la fonction définie par :
$$\forall\, x > 0, \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est bien définie en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?
3. (a) Montrer que
$$\forall\, x > 0 \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

(b) Déterminer la limite et un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

4. Dans toute cette dernière question, on considère x un réel strictement positif.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Montrer que

$$\forall\, h > 0, \qquad \forall\, t \geq 0, \qquad \left|\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{h}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{h^2}{(x+t)^3}.$$

   (c) Montrer que f est dérivable au point x et donner l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Partie 2 : probabilités et statistiques.

Notations:

v.a. signifie variable aléatoire et v.a.i.i.d. variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées.

$\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ représentent respectivement l'espérance et la variance d'une v.a. X, lorsque ces quantités existent.

Exercice 1.

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0,1[$. On note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \tag{1}$$

la moyenne empirique des n premiers termes.

1°. Rappeler l'inégalité de Markov et la redémontrer.

2°. Soit $G(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}]$. Justifier l'existence de cette espérance, puis déterminer l'expression de $G(t)$ en fonction de t et θ.

3°. Déterminer la loi de $n\bar{X}_n$ et préciser l'espérance de $\bar{X}_n$.

4°. Déduire des questions précédentes que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(t\bar{X}_n\right)\right] = \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n. \tag{2}$$

5°. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $t > 0$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left[\bar{X}_n \geq \varepsilon\right] \leq e^{-\varepsilon t}\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n. \tag{3}$$

6°. On suppose que $\varepsilon > \theta$. Soit $\Lambda_\varepsilon : t \mapsto \varepsilon t - \ln(G(t))$, où $\ln$ représente le logarithme népérien. Étudier les variations de Λ_ε sur $]0,+\infty[$ et en déduire l'existence et l'expression de

$$K(\varepsilon,\theta) = \sup_{t\geq 0}\Lambda_\varepsilon(t), \tag{4}$$

puis montrer que

$$\mathbb{P}\left[\bar{X}_n \geq \varepsilon\right] \leq e^{-nK(\varepsilon,\theta)}. \tag{5}$$

7°. On suppose que $\varepsilon < \theta$. Déterminer la loi de la v.a. $n(1-\bar{X}_n)$, puis montrer que

$$\mathbb{P}\left[\bar{X}_n \leq \varepsilon\right] \leq e^{-nK(1-\varepsilon,1-\theta)}. \tag{6}$$

8°. En déduire l'inégalité de Chernoff :

$$\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\left[\left|\bar{X}_n - \theta\right| \geq \delta\right] \leq 2e^{-nc}. \tag{7}$$

où c est une constante ne dépendant pas de n, que l'on exprimera en fonction de δ et θ.

9°. En déduire que $(\bar{X}_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

10°. Démontrer que $(\bar{X}_n)_n$ converge également dans L^2.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires mutuellement indépendantes et tel que chaque X_n suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre réel inconnu. On note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon.

1°. Rappeler l'expression de l'espérance, la variance, la fonction de répartition F et la fonction de densité f d'une variable aléatoire de loi uniforme sur$[0, \theta]$.

2°. Prouver l'existence, puis déterminer $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ et en déduire un estimateur sans biais $\theta_1(n)$ de θ. Étudier son erreur quadratique moyenne et démontrer qu'il converge dans L^2 et en probabilité. Déterminer la limite en loi de la suite de v.a. de terme général $\sqrt{n}(\theta_1(n) - \theta)$.

3°. On note $X_{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$. Déterminer sa fonction de répartition F_n, sa densité f_n, son espérance et sa variance.

4°. Déduire de la question précédente un estimateur sans biais $\theta_2(n)$ de θ. Déterminer sa variance, son erreur quadratique moyenne et démontrer qu'il converge en probabilité et dans L^2.

5°. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression de $\mathbb{P}[n(\theta - X_{(n)}) \leq t]$ et en déduire sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite en loi de la suite de v.a. de terme général $n(\theta - X_{(n)})$.

Soit Γ la fonction gamma d'Euler, définie pour $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{8}$$

Une variable aléatoire Y suit une loi bêta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si sa densité est de la forme

$$\forall x \in]0, 1[, \; g(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1} \tag{9}$$

et $g(x) = 0$ si $x \notin]0, 1[$, avec

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx. \tag{10}$$

6°. Montrer que pour tout $z > 0$, $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, puis déterminer l'espérance et la variance de Y en fonction de a et b.

7°. On suppose que $n = 2m+1$. On classe les X_n par ordre croissant et l'on note $X_{(m+1)}$ le $(m+1)$-ième terme; on dit que $X_{(m+1)}$ est la médiane empirique de $(X_1, ..., X_n)$. On admet que sa densité est:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = (m + 1) \begin{pmatrix} 2m + 1 \\ m + 1 \end{pmatrix} f(x)F(x)^m(1 - F(x))^m. \tag{11}$$

Démontrer que $X_{(m+1)}/\theta$ suit une loi bêta dont on précisera les paramètres en fonction de m.

8°. En déduire que $\theta_3(n) = 2X_{(m+1)}$ est un estimateur sans biais de θ. Déterminer son erreur quadratique moyenne et démontrer qu'il converge en probabilité et dans L^2.

9°. Comparer les trois estimateurs.