Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

ÉPREUVES ÉCRITES

CONCOURS INTERNE 2023
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS DE L'INSEE

COMPOSITION D'ÉCONOMIE ET SCIENCES SOCIALES

(durée: 4 heures)

Cette composition comporte deux parties:

-La première porte sur les sciences sociales.

-La seconde porte sur l'économie.

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.
Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur **une copie séparée**.

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES

Comment se construisent les inégalités sociales de santé?

PARTIE 2 : ÉCONOMIE

Faut-il augmenter les salaires en période de forte inflation?

CONCOURS ADMINISTRATEUR INTERNE DE L'INSEE

Session 2023

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - STATISTIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7

Tous documents et appareils électroniques interdits

Tournez la page S.V.P

Partie 1 : algèbre-analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n ($n \geqslant 2$).
On appelle sous-espace faible de E_n un sous-espace ne contenant aucune matrice inversible. On rappelle les deux définitions suivantes :

- Une matrice M non nulle de E_n est dite nilpotente s'il existe $p \geqslant 2$ tel que $M^p = 0$.
- On appelle hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension m, un sous-espace vectoriel de dimension $m-1$.

Partie 1

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

1. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$
2. Montrer que toute matrice A de E_2 est semblable à une et une seule des matrices réduites suivantes :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
où λ et μ sont deux nombres complexes distincts ou non.
On admettra le résultat suivant : si une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède une seule valeur propre λ, alors $(A - \lambda I_n)^2 = 0$.
3. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
4. Pour tout couple (A, B) d'éléments de E_2 non colinéaires, on note $P_{A,B} = \mathrm{Vect}(A, B)$.
   (a) On suppose A inversible. Montrer que tous les les éléments de $P_{A,B}$ sont inversibles, sauf ceux appartenant à au plus deux droites vectorielles.
   (b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, le plan $P_{A,B}$ est-il faible ?
   (c) Soit A une matrice non nulle mais non inversible de E_2. En utilisant la question 2, trouver deux plans faibles contenant A.

Partie 2

Dans cette partie, on revient au cas général où n est quelconque supérieur ou égal à 2.
On se propose de montrer, par l'absurde, qu'il n'existe pas d'hyperplan faible de E_n.
Soit donc H un hyperplan faible de E_n.

5. Montrer que $H \bigoplus \mathrm{Vect}(I_n) = E_n$.
6. En déduire que les matrices nilpotentes appartiennent à H.
7. Conclure.

EXERCICE 2

On prendra garde au fait que, selon les questions, différentes hypothèses spécifiques sont prises sur les fonctions étudiées.

Préliminaire

Soit h une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_a^b h(t)\, sin\, nt\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

*On admettra d'une part qu'on obtient un résultat identique pour la suite $v_n = \int_a^b h(t)\, cos\, nt\, dt$ et, d'autre part, que ces résultats sont encore valides si h est seulement supposée **continue**.*

1ère partie

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la convergence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\, sin\, t\ \ dt \text{ et } I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, sin\, nt\, dt.$$

On suppose ici que **l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente.**

1. Montrer que I et I_n sont convergentes.

2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On coupera l'intégrale I_n en deux morceaux définis de façon adéquate.

2ème partie

On abandonne l'hypothèse de la partie précédente et on suppose dorénavant dans cette partie que f est décroissante et de limite nulle en $+\infty$ (hypothèse (H)).

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\, sin\, t\, dt$.

3.
   a. Montrer que : $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|sin\, t|dt$.
   b. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N} : 2\, f[(n+1)\pi] \leq |u_n| \leq 2\, f(n\pi)$.
   c. En déduire $\underset{n\to+\infty}{lim}\, u_n$.
   d. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $n = Int\, \left(\frac{x}{\pi}\right)$ (partie entière).
   a. Montrer que $\int_{n\pi}^{x} f(t)\, sin\, t\, dt\ \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.
   b. En déduire la convergence de l'intégrale I.

5.

a. Montrer que les intégrales I_n et $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{y}{n}\right) sin\, y\, dy$ sont de même nature.

b. Montrer qu'elles sont convergentes.

c. Un exemple où f n'est pas définie en 0 mais est décroissante et de limite nulle en $+\infty$: déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n$ lorsque $f(t) = \frac{1}{t}$.

6. Dans cette question, on prend comme nouvelle hypothèse (se substituant aux précédentes) que f est de classe C^1 et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ est absolument convergente.

a. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

b. Montrer que l'intégrale I_n (pour n *fixé*) est convergente si et seulement si $f(x)\, cos\, nx$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer que cette dernière condition implique : $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. En déduire, sous ces hypothèses, que : $I_n = \frac{f(0)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on considère une particule se déplaçant sur un axe gradué, en partant de l'origine au temps 0 et en effectuant à chaque unité de temps des sauts indépendants d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche, avec la même probabilité 1/2.
Si on note, pour tout entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire égale au $k-$ ième déplacement, les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont donc mutuellement indépendantes et ont toutes la même loi de probabilité que la variable X définie par :

$$P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{2}.$$

Pour tout couple d'entiers (n,p) vérifiant $0\leqslant p\leqslant n$, on désigne par $\binom{n}{p}$ le nombre : $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Questions préliminaires

1. Soient (a_n) et (b_n) sont deux suites à termes positifs vérifiant $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, telles que les séries de termes généraux a_n et b_n soient divergentes.
   Établir le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$.
2. (a) Montrer que, pour entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+k+1}$ et calculer la valeur commune de ces sommes.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}=2^{2n-1}-\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.
   (c) Déduire de ce qui précède le résultat suivant : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n+k}=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

Partie 1 : abscisse de la particule au temps n

Pour tout entier naturel n, on note S_n l'abscisse de la particule à l'issue de n déplacements.
On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et on pose } S_0=0$$

3. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que les variables Y_k définies par $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ Y_k=aX_k+b$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire la loi de S_n.
5. (a) Donner la valeur de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ quand n tend vers $+\infty$.
6. Soit s et t des réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 1 .
   (a) Montrer que : $\mathbb{E}(e^{tS_n})=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n$.
   (b) Établir l'inégalité : $\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)\leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.
   (c) Montrer que : $\mathbb{P}\left([S_n>s]\right)\leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}-ts\right)$.
   (d) Justifier l'inégalité : $\mathbb{P}\left([|S_n|>s]\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

7. On pose, pour tout réel $\alpha > 0$: $\mathcal{C}_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [|S_k| > k^\alpha] \right)$.

   (a) Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}\left([|S_n| > n^\alpha]\right)$ est convergente.

   (b) En déduire que, pour tout réel $\alpha > \dfrac{1}{2}$, la valeur de $\mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha)$.

Partie 2 - Nombre moyen de retours à l'origine

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Z_{2n} la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où la particule est repassée par l'origine entre les instants 1 et $2n$ (1 et $2n$ compris).

8. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.$$

9. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

   (a) Déterminer un équivalent de U_n quand n tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Z_{2n})$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère un ensemble fini E de cardinal $N \geq 2$. Sur cet ensemble, sont définies les grandeurs suivantes :

- Une famille de variables aléatoires Z_i $(i = 1, \ldots, N)$, suivant chacune la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, \mu_i)$, avec $\mu_i \in]0,1[$
- S la partie (*aléatoire*) de E définie par : $S = \{i \in E\ ;\ Z_i = 1\}$.
- ζ la variable aléatoire $\zeta = Card\ S$.
- Une famille de variables réelles non aléatoires $\boldsymbol{y_i} \geq \mathbf{0}$ $(i = 1, \ldots, N)$. On pose :

$$T(Y) = \sum_{i=1}^{N} y_i \text{ et } \overline{Y} = \frac{T(Y)}{N}.$$

1$^{\text{ère}}$ partie

On suppose dans cette partie que les $\boldsymbol{Z_i}$ sont indépendantes.

1.
   a) Exprimer ζ en fonction des Z_i.
   b) En déduire $E\zeta$ et $V\zeta$.

2. Soit s une une partie **fixée** (non aléatoire) de E. On pose : $p(s) = P\{S = s\}$.

   a) Exprimer $p(s)$ en fonction des μ_i.
   On pourra écrire le résultat en fonction des réalisations z_i des variables aléatoires Z_i.

   b) Vérifier que la formule obtenue satisfait bien la condition $\sum_{s \subset E} p(s) = 1$.

3. Dans le cas particulier où les μ_i ont une même valeur μ :

   a) Expliciter $p(s)$.
   b) Calculer la loi de ζ.
   c) Calculer la loi conditionnelle $P\{S = s/\zeta = n\}$ pour $1 \leq n \leq N$.

4. On revient au cas général. On pose :

$$\hat{T}(Y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\mu_i} Z_i.$$

   a) Calculer $E\hat{T}(Y)$ et $V\hat{T}(Y)$.

   b) Les y_i étant supposés donnés, comment faudrait-il choisir les μ_i pour minimiser $V\hat{T}(Y)$ sous la contrainte $E\zeta = n$ (entier fixé) ?
   On pourra utiliser l'inégalité de SCHWARZ.

   c) Que vaut alors $V\hat{T}(Y)$?

2$^{\text{ème}}$ partie

On ne suppose plus ici que les Z_i sont indépendantes.

5. **Étude d'un cas particulier.** On suppose ici que :
   - les Z_i suivent la même loi de BERNOULLI $\mathscr{B}(1, \mu)$, avec $\mu \in]0,1[$
   - le coefficient de corrélation entre Z_i et Z_j vaut ρ (quels que soient i et j)
   - il existe un entier n fixé tel que : $\sum_{i=1}^{N} Z_i = n$.

   Calculer ρ en fonction de N.

6. **On revient au cas général** et on note : $\mu_{i,j} = P\{Z_i = 1 \text{ et } Z_j = 1\}$ pour $i \neq j$.

   a) Calculer $V\hat{T}(Y)$. On l'écrira sous la forme : $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{y_i}{\mu_i} \frac{y_j}{\mu_j} \Delta_{i,j}$, où $\Delta_{i,j}$ est le terme général d'une matrice ne dépendant que des μ_i et $\mu_{i,j}$.

   b) Dans le cas particulier où $\zeta = n$ (entier fixé), vérifier que :
   $$V\hat{T}(Y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_{i,j} \left(\frac{y_i}{\mu_i} - \frac{y_j}{\mu_j} \right)^2.$$

   c) Dans le cas général, calculer $V\zeta$.

3$^{\text{ème}}$ partie

On suppose ici qu'il existe une matrice $K \in M_N(\mathbb{R})$, *symétrique*, dont les valeurs propres sont dans $[0,1]$, et dont les éléments $k_{i,j}$ vérifient les relations : $\begin{cases} \mu_i = k_{i,i} \\ \mu_{i,j} = k_{i,i}k_{j,j} - k_{i,j}^2 \end{cases}$.

7.
   a) Exprimer $V\hat{T}(Y)$ en fonction des éléments de K et des quantités $\frac{y_i}{\mu_i}$.

   b) En déduire que : $E\zeta = Tr\, K$ et : $V\zeta = Tr\, K - Tr\, K^2$.

   c) En déduire que : $V\zeta = \sum_{i=1}^{N} \beta_i (1 - \beta_i)$, où les β_i sont les valeurs propres de K.

   d) Si l'on impose que la variable aléatoire ζ soit un entier fixé n, montrer que la matrice K est alors une matrice de projection orthogonale.