Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

ÉPREUVES ÉCRITES

Institut National de la statistique et des études économiques – 88, avenue Verdier – CS 70058- 92541 MONTROUGE CEDEX – FRANCE – www.insee.fr
Tél. Standard : 01 41 17 50 50 – N°SIRET : 120 027 016 00019 – Code APE : 84,11Z- Service Insee Contact : 09 72 72 4000 – (tarification "appel local")

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

CONCOURS INTERNE 2022
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS DE L'INSEE

COMPOSITION D'ÉCONOMIE ET SCIENCES SOCIALES

(durée: 4 heures)

Cette composition comporte deux parties:

-La première porte sur les sciences sociales.

-La seconde porte sur l'économie.

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.
Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur **une copie séparée**.

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES

Comment représenter l'espace social ?

PARTIE 2 : ÉCONOMIE

Comment la crise sanitaire va-t-elle durablement changer le marché du travail ?

CONCOURS ADMINISTRATEUR INTERNE DE L'INSEE

Session 2022

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES-STATISTIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 10 pages.

Tous documents et appareils électroniques interdits

Tournez la page S.V.P

Partie 1 : analyse-algèbre

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^+$. On note F sa primitive s'annulant en 0.

On appelle transformée de LAPLACE de f l'application L : $a \in \mathbb{R} \to L(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$.

Préliminaires

1. Montrer que L est bien définie dès que $a \geq 0$ dans chacun des cas suivants :
   a) l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est convergente.
   b) l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente, non absolument convergente.
   On pourra utiliser la primitive F.
2. Calculer $L(a) + L(-a)$ quand f est la densité de la loi normale centrée réduite.

1ère partie

On suppose dans cette partie l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ **convergente**. On la notera I.

On pose : $g(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^x F(t)\, dt$.

3. Montrer que : $g(x) - I \to 0$ quand $x \to +\infty$.
4. En déduire que : $\dfrac{1}{x} \int_0^x t\, f(t)\, dt \to_{x \to +\infty} 0$.
5. Montrer que : $\lim_{a \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.
   On exprimera la quantité $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt - I$ en fonction de $a \int_0^{+\infty} e^{-at} (F(t) - I)\, dt$ et on coupera cette dernière intégrale en un point A adéquat.

2ème partie

On suppose maintenant que : $\boxed{t\, f(t) \to_{t \to +\infty} 0.}$

6. On pose : $h(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$. Montrer que : $\dfrac{h(x)}{x} \to_{x \to +\infty} 0$.
7. Montrer que, pour tout $\boxed{a > 0,}$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} \dfrac{a\,t + 1}{t^2} h(t)\, dt$ est convergente.

8. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-a\,t}\, f(t)\, dt$ et la relation :

$$\int_1^{+\infty} e^{-a\,t}\, f(t)\, dt = -\,e^{-a}\, h(1) + \int_1^{+\infty} e^{-a\,t}\, \frac{a\,t+1}{t^2}\, h(t)\, dt.$$

9. Montrer que : $\int_0^A f(t)\, dt - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{A}}\, f(t)\, dt \to_{A \to +\infty} 0.$

On pourra décomposer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{A}}\, f(t)\, dt$ *en la coupant en un point A choisi de telle sorte que* $t\,f(t)$ *soit suffisamment petit pour* $t \geq A$.

10. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente si et seulement $\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, f(t)\, dt$ admet une limite finie quand $a \to 0$.

3ème partie

On suppose dans cette partie que : $\frac{1}{x}\int_0^x t\, f(t)\, dt \to_{x \to +\infty} 0$.

On pose : $G(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\, dt$ pour $x > 0$.

11. Montrer que G est prolongeable par continuité en 0.

12.

   a) Montrer que : $\int_0^x f(t)\, dt = x\,G(x) + \int_0^x G(t)\, dt$.

   b) En déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} G(t)\, dt$ sont de même nature et de même valeur lorsqu'elles convergent.

13.

   a) Montrer que :

$$\forall\ a > 0\,,\ \forall\ x > 0 : \int_0^x e^{-a\,t}\, f(t)\, dt = x\, G(x)\, e^{-a\,x} + \int_0^x e^{-a\,t}\, G(t)\,(1 + a\,t)\, dt.$$

   b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, G(t)\,(1 + a\,t)\, dt$ est convergente.

   c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, f(t)\, dt$ est convergente.

14. Montre que : $\lim_{a \to 0} a \int_0^{+\infty} e^{-at}\, t\, G(t)\, dt = 0.$

On pourra décomposer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\, G(t)\, dt$ *en la coupant en un point A.*

On choisira A de telle sorte que $t\,G(t)$ *soit suffisamment petit pour* $t \geq A$.

15. On rajoute enfin l'hypothèse : $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ **possède une limite finie quand** $a \to 0$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} G(t)\, e^{-at}\, dt$ possède une limite finie quand $a \to 0$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et que :

$$\lim_{a \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt.$$

c) Énoncer le théorème ainsi démontré dans ce problème.

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \ \rangle$ et de sa base canonique, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On note $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA$ sa transposée.
On dit qu'une matrice symétrique A est positive si, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
Le but de cet exercice est d'étudier les matrices symétriques réelles positives dont tous les termes autres que les termes diagonaux, sont strictement négatifs.

Préliminaire

1. Justifier qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, constituée de vecteurs propres de A, associés à des valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non nécessairement distinctes.
2. Montrer l'équivalence suivante : A est positive $\iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Partie 1 - Un exemple

Dans cette partie, on considère deux réels a et b strictement positifs et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & \ldots & \ldots & -b \\ -b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \ldots & \ldots & -b & a \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que tous les termes diagonaux sont égaux à a et les autres à $-b$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que A soit positive.
4. Soit λ_1 la plus petite valeur propre de A.
   Donner le rang de $A - \lambda_1 I_n$, noté $\mathrm{rg}(A - \lambda_1 I_n)$, et montrer qu'il existe un vecteur X de coordonnées toutes strictement positives tel que $AX = \lambda_1 X$.

Partie 2 - Le cas général

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ symétrique positive dont tous les coefficients non diagonaux sont strictement négatifs.
Pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $|X|$ la matrice colonne ${}^t(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

5. (a) Établir, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité suivante :
   $$^t|X|A|X| \leqslant {}^tXAX.$$
   (b) Montrer, pour tout élément Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité suivante :
   $$\left({}^tZA|X|\right)^2 \leqslant \left({}^tZAZ\right)\left({}^tXAX\right).$$
6. On suppose qu'il existe $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, non nul, tel que $AX = 0$.
   (a) Montrer que $A|X| = 0$.
   (b) En déduire que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.
7. On suppose que A est non inversible et on considère deux vecteurs non nuls, $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$, vérifiant $AX = 0$ et $AY = 0$.
   (a) Montrer que X et Y sont colinéaires.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}A \geqslant n - 1$.
8. Soit λ_1 la plus petite valeur propre de A.
   (a) Montrer que, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 {}^tXX$.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}(A - \lambda_1 I_n) = n - 1$.
   (c) Montrer qu'il existe un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tel que pour tout i de $[\![1, n]\!]$ $x_i > 0$ et vérifiant $AX = \lambda_1 X$.

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées être définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si X est une variable aléatoire, on note :

- $\lfloor X \rfloor$ **la partie entière de** X.
- $Fr(X) = X - \lfloor X \rfloor$ **la partie fractionnaire de** X.
  On admet que $\lfloor X \rfloor$ **et** $Fr(X)$ **sont bien des variables aléatoires.**

Partie 1

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), c'est-à-dire qu'une densité de X est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = Fr(X)$.

1. (a) **Déterminer la loi de probabilité de Y.**
   (b) **Calculer $\mathbb{E}(Y)$.**
2. **Déterminer la fonction de répartition de Z.**
3. **Montrer que Y et Z sont indépendantes.**
4. **On note $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier naturel n non nul, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$.**
   On pose $Z_n = Fr(X_n)$. Montrer que $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi et préciser la loi limite.

Partie 2

On considère X une variable à densité dont les parties entières et fractionnaires sont notées respectivement Y et Z et vérifient :

- $X(\Omega) = [0, 2]$.
- $\mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$.
- Z **suit la loi uniforme sur** $[0, 1[$.
- Y **et** Z **sont indépendantes.**

5. **Déterminer la loi de X.**

Partie 3

On considère un entier naturel k non nul et une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, k]$.
Une densité de X_n est donc donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{X_n}(t) = \frac{1}{k} \mathbf{1}_{[0,k]}(t).$$

On définit, pour tout entier naturel n non nul, les variables aléatoires S_n et Z_n :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \text{ et } Z_n = Fr(Z_n).$$

6. Déterminer une densité de S_2, puis sa fonction de répartition.
7. Montrer que Z_2 suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.
8. (a) On note f la fonction qui, à tout réel x, associe $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
   Calculer $f\Big(f(S_n) + X_{n+1}\Big)$ en fonction de Z_{n+1}.

   (b) Montrer que Z_n suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Tournez la page S.V.P

Exercice 2

On considère une suite de variables aléatoires réelles $Y_1, \dots, Y_n, \dots,$ indépendantes et de même loi, admettant une densité $h(y, \theta)$, où θ est est un paramètre réel que l'on cherche à estimer, décrivant $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{+*}$ ou un intervalle $]a, b[$.

On considère le modèle : $f(Y_i) = g(\theta) + U_i$, où f et une fonction continue, g une fonction continue et *bijective, de réciproque continue* et les U_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

1. On estime θ par la méthode des *moindres carrés*, c'est-à-dire en minimisant la fonction :

$$S_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [f(Y_i) - g(\theta)]^2.$$

   Donner l'expression de $g(\hat{\theta}_n)$ puis de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ ainsi obtenu.

2. On souhaite obtenir un estimateur de θ convergent.

   a) En supposant que les variables aléatoires $f(Y_i)$ sont intégrables pour toute valeur de θ, d'espérance notée $E_\theta f(Y)$, étudier la convergence en probabilité de $\hat{\theta}_n$ quand $n \to +\infty$.

   b) Déterminer la relation que doit satisfaire la fonction g pour que $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ.
   On fera l'hypothèse que cette relation définit bien une fonction continue et bijective. ***On fera dorénavant ce choix pour la fonction*** g.

   c) Les observations des Y_i étant notées y_i, montrer que l'estimateur obtenu vérifie l'égalité :

$$E_{\hat{\theta}_n} f(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

   Comment s'interprète alors cette méthode d'estimation ?

On suppose dorénavant que les variables aléatoires $f(Y_i)$ sont de carré intégrable pour toute valeur de θ. On notera $V_\theta f(Y)$ leur variance.

On suppose de plus que la fonction g définie à la question 2 est de classe C^1 et que sa dérivée ne s'annule jamais.

3. On pose : $\hat{U}_i = f(Y_i) - g(\hat{\theta}_n)$. Étudier la convergence en probabilité de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$ quand $n \to +\infty$.

4. Montrer que : $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{loi}{\to} N\left(0, \frac{V_\theta f(Y)}{[g'(\theta)]^2}\right)$.

   On rappelle le résultat suivant : si l'on a une suite $X_1, \dots, X_n, \dots,$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, d'espérance m et de variance σ^2, alors, pour toute fonction q continue et dérivable en m :

$$\sqrt{n}\,\left(q(\bar{X}_n) - q(m)\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{loi}{\to}} N\left(0, \sigma^2 [q'(m)]^2\right), \text{ où : } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On va chercher maintenant les fonctions f minimisant la variance asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ obtenue à la question précédente, soit $\dfrac{1}{n}\dfrac{V_\theta f(Y)}{[g'(\theta)]^2}$.

On supposera dans la suite que la densité $h(y,\theta)$ est strictement positive et que l'on peut dériver toute intégrale sous le signe $\int$.

5.

a) Démontrer la relation : $g'(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - g(\theta)] \dfrac{\partial h(y,\theta)}{\partial \theta}\, dy$.

b) En déduire que :

$$[g'(\theta)]^2 \le \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - g(\theta)]^2\, h(y,\theta)\, dy\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(y,\theta)}\left[\frac{\partial h(y,\theta)}{\partial \theta}\right]^2 dy\right].$$

[*on supposera convergentes les intégrales considérées*]

c) Démontrer les égalités :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(y,\theta)}\left[\frac{\partial h(y,\theta)}{\partial \theta}\right]^2 dy = E_\theta\left[\frac{\partial \ln h(y,\theta)}{\partial \theta}\right]^2 = V_\theta\left[\frac{\partial \ln h(y,\theta)}{\partial \theta}\right] = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln h(Y,\theta)}{\partial \theta^2}\right].$$

d) En déduire que : $\dfrac{1}{n}\dfrac{V_\theta f(Y)}{[g'(\theta)]^2} \ge \dfrac{1}{n\, V_\theta\left[\dfrac{\partial \ln h(y,\theta)}{\partial \theta}\right]}$.

6. On cherche à déterminer les fonctions f assurant l'*optimalité*, c'est-à-dire telles que la variance asymptotique de $\hat{\theta}_n$ soit minimale.

a) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de la question 5b si et seulement s'il existe une fonction $\lambda(\theta)$ (qu'on supposera *continue*) telle que :

$$\forall\ y \in \mathbb{R} : \lambda(\theta)\,[f(y) - g(\theta)] = \frac{\partial \ln h(y,\theta)}{\partial \theta}.$$

b) En déduire l'expression générale des fonctions $y \to h(y,\theta)$ vérifiant cette égalité. Quelle est alors la fonction f assurant l'optimalité ?

c) Synthétiser la démarche en expliquant les conditions sous lesquelles la méthode d'estimation de θ proposée en question 1 est optimale à tous points de vue.

7. Étude d'un premier exemple.

On suppose que les Y_i suivent la loi $N(0,\theta^2)$, $\theta > 0$.

a) La densité $h(y,\theta)$ de cette loi est-elle de la forme trouvée à la question 6b ?

b) Déterminer alors la fonction f optimale, la fonction g et l'estimateur $\hat{\theta}_n$.

8. Étude d'un deuxième exemple.

On suppose que les Y_i suivent la loi $N(\theta,\theta)$, $\theta > 0$.
Mêmes questions qu'en 7.

9. Étude d'un troisième exemple.

   On suppose que les Y_i suivent la loi $N(\theta, \theta^2), \theta > 0$.

   a) La densité $h(y, \theta)$ de cette loi est-elle de la forme trouvée à la question 6b ?
   b) Calculer la borne inférieure obtenue à la question 5d.
   c) Comparer les estimateurs de θ obtenus en prenant les fonctions $f(y = y)$ puis $f(y) = e^y$.

■ ■ ■ ■ ■ ■