

Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

ÉPREUVES ÉCRITES

CONCOURS INTERNE 2020
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS DE L'INSEE

COMPOSITION D'ÉCONOMIE ET SCIENCES SOCIALES

(durée: 4 heures)

Cette composition comporte deux parties:

-La première porte sur les sciences sociales.

-La seconde porte sur l'économie.

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.
Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES
Quel est l'intérêt du concept de genre en sociologie?

PARTIE 2 : ÉCONOMIE
Limites et leviers de la politique monétaire dans un contexte de taux bas

CONCOURS INTERNE 2020
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS DE L'INSEE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(durée: 4 heures)

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Tout document ou appareil électronique est interdit.

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes,
chacune comptant pour moitié dans la note finale

Tournez la page S.V.P.

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Soient E un espace euclidien muni de sa norme usuelle $\|\cdot\|$ et u un endomorphisme *symétrique* de E , dont **toutes les valeurs propres sont** > 0 .

On définit l'application : $q : x \in E - \{0\} \rightarrow q(x) = \frac{[\langle x, u(x) \rangle]^2}{\|u(x)\|^2 \|x\|^2}$.

L'objet de ce problème est la recherche et la détermination des *extrema* de q .

1. Montrer que q est bien définie sur $E - \{0\}$.
2.
 - a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in E - \{0\}$, calculer $q(\lambda x)$.
 - b) En déduire que les *extrema* de q sur $E - \{0\}$ (s'ils existent) sont ceux de q sur la *sphère unité* $S(0, 1) = \{x \in E ; \|x\| = 1\}$.
On ne demande pas à ce stade de démontrer l'existence de ces *extrema*.
3.
 - a) Montrer que : $\forall x \in E - \{0\} : q(x) \leq 1$.
 - b) En déduire la valeur du maximum de q et déterminer les éléments en lesquels il est atteint.
4.
 - a) Montrer que, en exprimant x par ses composantes x_i sur une base adéquate de E , on peut écrire : $q(x) = \frac{(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2)^2}{(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2) (\sum_{i=1}^n x_i^2)}$, où les λ_i sont les valeurs propres de u .
 - b) Que devient cette expression quand on exprime $q(y)$ où $y \in S(0, 1)$?
5.
 - a) Montrer que 0 ne peut être le minimum de q .
 - b) On note respectivement λ_m et λ_M la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de u . Montrer que : $\forall x \neq 0 : q(x) \geq \frac{\lambda_m^2}{\lambda_M^2}$.
 - c) Que peut-on en conclure si toutes les valeurs propres de u sont égales ? Qu'est alors u ?

On suppose dans la suite que les valeurs propres de u ne sont pas toutes identiques.

6. On se place ici dans le cas $\boxed{\text{Dim } E = 2}$.
 - a) Montrer que la recherche des *extrema* de q sur la sphère unité équivaut à la recherche des *extrema* d'une fonction d'une seule variable réelle, notée \tilde{q} .
 - b) En étudiant cette fonction \tilde{q} , déterminer *analytiquement* (via les conditions du 1^{er} ordre) les points de la sphère unité en lesquels q atteint son minimum (au moyen de leurs coordonnées sur la base considérée) et calculer la valeur de ce minimum.
7. On revient au cas où la dimension de E est quelconque, égale à $n \geq 3$. On numérote les valeurs propres de u en ordre croissant : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

- a) Montrer que la recherche des *extrema* de q sur la sphère unité équivaut à la recherche des

$$\text{extrema de la fonction de } n-1 \text{ variables : } \tilde{q}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) y_i^2 + \lambda_n \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^2 - \lambda_n^2) y_i^2 + \lambda_n^2}$$

- b) Montrer que les conditions du 1^{er} ordre pour la recherche des *extrema* de \tilde{q} s'écrivent sous la forme :

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} : y_j (\lambda_j - \lambda_n) \left(2 - \frac{P(y)}{Q(y)} (\lambda_j + \lambda_n) \right) = 0, \quad (\mathbf{S})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} P(y) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) y_i^2 + \lambda_n \\ Q(y) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^2 - \lambda_n^2) y_i^2 + \lambda_n^2 \end{cases}$$

- c) On se place dans le cas particulier où **toutes les valeurs propres de u sont distinctes**.

Montrer que la résolution du système **(S)** se ramène à un problème à deux variables comme dans le cas où $\text{Dim } E = 2$.

En admettant que les conditions du 1^{er} ordre conduisent effectivement à un minimum, déterminer alors le minimum de \tilde{q} , puis celui de q sur la sphère unité.

Exercice 2:

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une suite réelle $(b_n)_{n \geq 2}$ à termes strictement positifs et la suite $(u_{n,k})$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad u_{n,k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{kb_n}{n}\right)^n}$$

1. Montrer que pour tout n fixé, la série de terme général $u_{k,n}$ converge.

On pose alors
$$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{kb_n}{n}\right)^n}$$

2. Établir l'inégalité suivante :

$$S_n \geq \frac{1}{e^{b_n} - 1}$$

3. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{xb_n}{n}\right)^n}$$

(a) Montrer que $S_n \leq \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

(b) En déduire que $b_n S_n \leq 2$.

4. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\left(1 + \frac{kb_n}{n}\right)^n}$$

On suppose que la suite (b_n) converge vers un réel ℓ strictement positif et on admet le résultat suivant :

Si la suite $(S_{n,p})_{p \geq 1}$ converge uniformément vers S_n quand p tend vers $+\infty$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n,p} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n,p} \right)$$

(a) Justifier l'existence d'un réel b strictement positif tel que :

$$0 \leq u_{k,n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{kb}{n}\right)^n}$$

(b) Étudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$h(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{kb}{x}\right)^x}$$

(c) En déduire l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_{n,k} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{kb}{2}\right)^2}$$

5. (a) Montrer que la suite $(S_{n,p})_{p \geq 1}$ converge uniformément vers S_n quand p tend vers $+\infty$.

(b) En déduire, en fonction de ℓ , la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées être définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi et une variable N , à valeur dans \mathbb{N}^* et indépendante des variables X_k .

On considère les deux applications Z_n et Z définies sur Ω par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, \quad Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \text{ et } \forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega))$$

On admet que Z_n et Z sont des variables aléatoires.

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_k suivent toutes la loi géométrique de paramètre p , ($0 < p < 1$) et que N suit la loi de Mengoli, c'est-à-dire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mathbb{P}([X_k = m]) = p(1-p)^{m-1} \\ \mathbb{P}([N = m]) = \frac{1}{m(m+1)} \end{cases}$$

- (a) On considère un réel x appartenant à $]0, 1[$.

- i. Établir, pour tout entier naturel m non nul, la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$$

- ii. En déduire la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

- iii. En déduire également l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x + (1-x) \ln(1-x)$$

- (b) i. Calculer, pour tout entier naturel m non nul, $\mathbb{P}([Z_n \leq m])$.

- ii. Établir, pour tout entier naturel m non nul, l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([Z \leq m]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - (1-p)^m)^k}{k(k+1)}$$

- iii. En déduire la loi de Z .

2. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_k suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$ et que la loi de N est donnée par :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N = m]) = \frac{1}{(e-1)m!}$$

- (a) Vérifier que la relation précédente définit bien une loi de probabilité.

- (b) i. Déterminer la fonction de répartition de Z .

- ii. Vérifier que Z admet une densité et en donner une densité.

- iii. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

- (c) On considère dans cette question une variable aléatoire Y , indépendante des X_k , qui suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{e}$ et on pose $T = Y - Z$.

Calculer, pour tout réel x , $\mathbb{P}([T > x])$ et reconnaître la loi de T .

Exercice 2 :

L'objet de ce problème est le calcul de la médiane d'un « mélange » (défini ci-après) de lois lognormales en fonction des médianes de ces dernières, soit de manière exacte (mais au moyen d'une équation non soluble analytiquement), soit de manière approchée.

Les parties 2 et 3 de ce problème sont indépendantes mais utilisent les résultats de la première partie.

1^{ère} partie : généralités sur la loi lognormale

On dit qu'une variable aléatoire Z à valeurs > 0 suit une *loi lognormale* si $X = \text{Ln } Z$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($\sigma^2 > 0$ est la **variance** de la loi normale).

1. Soit Z_1 une variable aléatoire à valeurs > 0 telle que : $X_1 = \text{Ln } Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$.
 - a. Déterminer la fonction de répartition de la loi de Z_1 . On l'exprimera au moyen de la fonction de répartition H de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
 - b. Écrire la densité de la loi de Z_1 .

2. Soit Z_2 une variable aléatoire à valeurs > 0 telle que : $X_2 = \text{Ln } Z_2 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
 - a. Calculer le quantile d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ de la loi de Z_2 . On le notera q_α et on l'exprimera au moyen de la fonction de répartition H de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (*on rappelle que celle-ci est continue et strictement croissante*).
 - b. En déduire la valeur de la médiane μ de la loi de Z_2 .
 - c. Montrer que la loi lognormale est entièrement déterminée par la connaissance de sa médiane μ et d'un autre quantile *quelconque* d'ordre $\alpha \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2^{ème} partie

On considère ici deux familles de variables aléatoires : $A_1 = \{X_1, \dots, X_{n_1}\}$ et $A_2 = \{Y_1, \dots, Y_{n_2}\}$. Toutes les variables considérées sont indépendantes entre elles. Les variables X_i (resp. Y_j) suivent la même loi lognormale de densité f_1 et de fonction de répartition F_1 (resp. f_2 et F_2), issues de lois normales $N(m_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2$. On note μ_k les médianes de ces lois lognormales.

Conditionnellement au tirage des variables X_i et Y_j , on tire de manière équiprobable dans $A_1 \cup A_2$ une variable aléatoire, qui sera notée Z (égale donc à l'une des variables X_i ou Y_j).

3. Déterminer la loi de Z par une densité et/ou sa fonction de répartition.

4.
 - a. Écrire, en fonction de H (définie en 1.a) et des paramètres μ_k et σ_k l'équation permettant de déterminer la médiane μ de la loi de Z .
 - b. Donner une expression explicite de cette équation sous forme intégrale en utilisant la formulation de H sous forme intégrale et au moyen des mêmes paramètres.

3^{ème} partie

5. On considère deux lois de probabilités P et P_0 sur \mathbb{R} , admettant des densités respectives f et f_0 , supposées continues et > 0 sauf éventuellement en un point. On définit un *indicateur d'écart* entre P et P_0 : $K_{P/P_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln\left(\frac{f(x)}{f_0(x)}\right) f_0(x) dx$ lorsque cette intégrale a un sens.
- Montrer que : $K_{P/P_0} \geq 0$.
 - Montrer que $K_{P/P_0} = 0$ si et seulement si $P = P_0$.
 - En déduire la solution du problème $\text{Max} \int_{-\infty}^{+\infty} [\ln f(x)] f_0(x) dx$ quand f décrit l'ensemble des densités de probabilités sur \mathbb{R} .

Nota : cette définition se transpose sans difficulté au cas de probabilités définies seulement sur \mathbb{R}^+ .

6. On considère ici le cas où la loi P_0 est définie par sa densité : $f_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ où les f_i sont les densités de lois lognormales P_i issues de lois normales $N(m_i, \sigma_i^2)$ avec $\sigma_i > 0$ et les $\alpha_i \in]0, 1[$ tels que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

On cherche la loi lognormale P de densité f (issue d'une loi $N(m, \sigma^2)$) *approximant* la loi P_0 , c'est-à-dire *minimisant* K_{P/P_0} .

- Montrer que ce problème équivaut à la recherche des paramètres m et σ solutions du problème :

$$\text{Min} \left[\text{Ln } \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{+\infty} (\text{Ln } x - m)^2 f_i(x) dx \right]$$

- Calculer $\int_0^{+\infty} (\text{Ln } x - m)^2 f_i(x) dx$.
- En déduire que le problème à résoudre équivaut à :

$$\text{Min} \left[\text{Ln } \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i [\sigma_i^2 + (m_i - m)^2] \right]$$

- Écrire les conditions du 1er ordre pour la résolution de ce problème de minimisation.
- En déduire les valeurs des paramètres solutions des équations obtenues (*on admettra qu'elles définissent bien un minimum*).
- Calculer la médiane de la loi P^* réalisant l'optimum en fonction de celles des lois P_i .