

Sujet n°1

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et distribuées selon les densités :

$$f_n(t) = f_{X_n}(t) = \frac{1}{n} e^{-t/n} \mathbf{1}_{t \geq 0}$$

1. Reconnaître les lois de (X_n) , puis donner $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On pose $u_n = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > \varepsilon)$.
 - (a) Calculer u_n .
 - (b) Déterminer la limite de (u_n) .
 - (c) Effectuer un développement limité de u_n en l'infini.
3. On pose $M_n = \max(X_{n-1}, X_n)$.
 - (a) Donner la loi de M_n , ainsi que son espérance.
 - (b) On pose $v_n = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| > \varepsilon)$. Calculer v_n et étudier la comportement asymptotique de la suite (v_n) .

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E . Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $u^i = u \circ u \circ \dots \circ u$, où l'endomorphisme u apparaît i fois dans le membre de droite. On pose par ailleurs $u^0 = id_E$, avec id_E l'endomorphisme identité de E .

1. (a) Démontrer que la suite $(\ker u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
(b) Démontrer que la suite $(\operatorname{Im} u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_E$, où 0_E est l'endomorphisme nul sur E . Un tel endomorphisme est alors dit *nilpotent* et on pose dans ce cas $p_0 = \inf \{p \in \mathbb{N}^*, u^p = 0\}$.

2. Soit $i \in \llbracket 0, p_0 - 1 \rrbracket$. Démontrer que $\dim(\ker u^i) < \dim(\ker u^{i+1})$ et que $\operatorname{rg}(u^i) > \operatorname{rg}(u^{i+1})$. Que se passe-t-il à partir du rang p_0 ?
3. Démontrer que $p_0 \leq n$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* si elle est la représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$.

4. Dire pour chacune des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si elle est nilpotente, en justifiant votre réponse.
5. Démontrer que toute valeur propre de l'endomorphisme u est nécessairement nulle.
6. Dans cette question, on suppose que $u \neq 0_E$. L'endomorphisme u peut-il être diagonalisable ?

Sujet n°2

Exercice 1 (~ 25 minutes)

On considère un mobile qui se déplace le long d'un axe horizontal. On note $X_n \in \mathbb{Z}$ sa position au temps $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que sa position initiale est $X_0 = 0$. On suppose que $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n \in \{-1, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que les probabilités conditionnelles sont données par :

$$\mathbb{P}(\Delta X_{n+1} = 1 | \Delta X_n = 1) = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\mathbb{P}(\Delta X_{n+1} = 1 | \Delta X_n = -1) = \frac{1}{2} - \varepsilon$$

où $\varepsilon \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ est un réel fixé.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(\Delta X_n = 1)$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $p_0 = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire p_n en fonction de n . En déduire $\mathbb{E}(\Delta X_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de calculer $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n .
 - (a) Soit $i \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{V}(\Delta X_i)$ en fonction de p_i .
 - (b) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \neq j$. Calculer $\text{cov}(\Delta X_i, \Delta X_j)$.
 - (c) Déduire des deux expressions précédentes $\mathbb{V}(X_n)$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_n)$. Interpréter.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$.
3. Soit N une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\exists k \in \mathbb{N}^*$, tel que $N^k = 0$), et on pose $A = I + N$.
 - (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
 - (b) A est-elle diagonalisable?
 - (c) Est-ce qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Sujet n°3

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Dans cet exercice, on considère un réel $\lambda > 0$. Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et U une variable suivant une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On suppose que X et U sont indépendantes.

Le but de cet exercice est d'étudier la variable aléatoire $Y = UX$

1. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Quel est le support de Y ?
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = n | U = 1)$.
 - (b) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = n | U = -1)$.
 - (c) Dédire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}(Y = n)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
5. Calculer $\mathbb{V}(Y)$.
6. (a) Rappeler et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive.
(b) Rappeler comment on en déduit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable admettant des moments d'ordres 1 et 2. **Dans toute la suite, a désigne un réel strictement positif.**
 - (c) Démontrer que $\mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a}$.
 - (d) Démontrer que $\mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq \frac{\lambda(\lambda + 1)}{a^2}$.
 - (e) Discuter, selon les valeurs de λ et a , lequel des deux majorants des deux questions précédentes privilégier.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, décroissante, convexe et telle que $f \xrightarrow{\infty} 0$.

On définit pour tout entier naturel n , $u_n = f(n) - f(n+1)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k f(k)$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.
2. Montrer que la suite (S_n) converge vers une limite l , telle que que $|l - S_n| \leq f(n+1)$. On notera $l = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f(k)$.
3. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = 2(l - S_n) + (-1)^n f(n+1)$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. Montrer que $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq f(n+1) - f(n+2)$.
6. Montrer que la série $\sum (l - S_n)$ converge.

Sujet n°4

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soient un réel $\alpha \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire réelle. On appelle quantile d'ordre α tout réel q satisfaisant $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$ et $\mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha$.

- Déterminer l'ensemble des quantiles d'ordre α pour les lois suivantes :
 - X suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$;
 - X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
 - X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
- On suppose que X suit une loi normale centrée et réduite, et on note Φ sa fonction de répartition.
 - Montrer que pour tout t , $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.
 - Montrer que X admet un unique quantile d'ordre α , que l'on note q_α .
 - Montrer que $q_{1-\alpha} = -q_\alpha$.
 - En déduire que $\mathbb{P}(|X| > q_{1-\alpha/2}) = \alpha$.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On admet que $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

- Démontrer la convergence de l'intégrale I_n , pour tout entier naturel n non nul.
- Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à termes strictement positifs. Que peut-on en déduire ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un couple de réels (a_n, b_n) tel que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(1+t^2)^n} \right) = \frac{a_n}{(1+t^2)^{n+1}} + \frac{b_n}{(1+t^2)^n}$$

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
- En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, lorsque $n \rightarrow +\infty$. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Sujet n°5

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soient λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Rappeler les expressions de la densité et de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ .

Le but de ce qui suit est d'étudier la loi de la variable aléatoire $Y = \exp(X)$.

2. Quel est le support de Y ?
3. Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y .
4. Calculer la densité f_Y de la variable aléatoire Y .
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que Y admette une espérance. Sous cette condition, calculer $\mathbb{E}(Y)$.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que Y admette un moment d'ordre 2. Sous cette condition, calculer $\mathbb{V}(Y)$.
7. On suppose que $\lambda > 2$. Démontrer que

$$\forall a > 0, \mathbb{P}\left(\left|Y - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| \geq a\right) \leq \frac{\lambda}{a^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)}$$

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ stable par produit ($\forall M, M' \in F$, on a $MM' \in F$).

Supposons que $I_n \notin F$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{vect}(I_n)$.
2. Notons p la projection sur $\text{vect}(I_n)$ parallèlement à F .
 - (a) Montrer que $\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p(MM') = p(M)p(M')$.
 - (b) Montrer que $M^2 \in F \implies M \in F$.
 - (c) Montrer que pour tout couple (i, j) , $E_{ij} \in F$ [où (E_{ij}) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$].
 - (d) Aboutir à une contradiction.

Sujet n°6

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $|X| \leq 1$. On note $L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$.

On admet dans la suite de l'exercice que pour tout réel t on a $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

2. Dédire des questions précédentes que : $\forall t \in \mathbb{R}, L_X(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
3. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées. On suppose de plus que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n > 0, |X_n| \leq c_n$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, L_{X_j}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}c_j^2\right)$.

(b) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, L_{S_n}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}a_n\right) \text{ avec } a_n = \sum_{i=1}^n c_i^2$$

(c) Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle positive.

(d) Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}a_n\right)$.

(e) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.

(f) Démontrer de même que : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(S_n < -\varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.

(g) En déduire finalement que : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$ (variations, graphe...).
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^y e^{t^2} dt = 1$. Comme y dépend de x , on note : $y = \varphi(x)$.
3. Montrer que φ est dérivable et déterminer une relation entre φ et φ' .
4. Étudier les variations de φ et ses limites en l'infini.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de φ .

Sujet n°7

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon la densité (avec $\theta > 0$) :

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x).$$

1. Montrer que f_θ est une fonction densité.
2. Donner des représentations graphiques de f_θ et de la fonction de répartition F_θ .
3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Proposer deux estimateurs sans biais de θ construits à partir de S_n et M_n .
4. Quel estimateur de θ faut-il préférer ?

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\alpha > 0$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite α -hölderienne, si elle vérifie la condition suivante : $\exists C > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$.

1. Démontrer que la fonction f définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$ -hölderienne.
2. Soit $\alpha > 1$. Démontrer que toute fonction α -hölderienne est constante.
3. On suppose dans cette question que $I = [0, 1]$.
 - (a) Soient α et β deux réels tels que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Démontrer que si f est β -hölderienne alors elle est α -hölderienne.
 - (b) Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $\frac{1}{2}$ -hölderienne mais pas 1-hölderienne.
4. On note f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$.
 - (a) Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note à nouveau f le prolongement ainsi obtenu.
 - (b) Démontrer que f n'est α -hölderienne pour aucun réel $\alpha > 0$.

Sujet n°8

Exercice 1 (~ 25 minutes)

Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ .

1. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , calculer pour tout réel x la quantité $S_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$.
2. On note $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
 - (a) Calculer $\mathbb{P}(m_n > x)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel x .
 - (b) En déduire la loi de m_n , ainsi que $\mathbb{E}(m_n)$ et $\mathbb{V}(m_n)$.
3. On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
 - (a) Calculer $\mathbb{P}(M_n \leq x)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel x .
 - (b) En déduire que M_n est une variable à densité et calculer sa densité.
 - (c) Démontrer que si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

- (d) Dédurre de la question précédente que $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k\lambda}$; mais aussi que $\mathbb{E}(M_n) =$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (e) Démontrer l'existence d'une constante γ telle que $\mathbb{E}(M_n) \sim \frac{\ln n + \gamma}{\lambda}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

1. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$.
2. Expliciter deux matrices différentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient cette propriété.
3. Supposons que B est inversible et notons $O = AB^{-1}$.
 - (a) Montrer que ${}^tOO = I_n$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que ${}^tOO = I_2$.
 - (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des matrices B telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

Sujet n°9

Exercice 1 (~ 25 minutes)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X \geq k)$.
2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue n tirages d'une boule avec remise dans cette urne, et on note X_k le numéro de la boule tirée au k -ième tirage.
 - (a) Quelle est la loi de X_k ?
 - (b) Donner son espérance et sa variance.
 - (c) Supposons que l'on ne connaisse pas N . Proposer un estimateur sans biais et convergent de N .
 - (d) On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Donner la fonction de répartition de M_n .
 - (e) Montrer que $\mathbb{E}(M_n) \geq N - \frac{N}{n+1}$.
 - (f) Montrer que $\mathbb{E}(M_n) \xrightarrow{\infty} N$.

Exercice 2 (~ 20 minutes)

Soient n un entier naturel non nul et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose dans cette question que $f^2 = -f$.
 - (a) Démontrer que si $f^2 = -f$ alors toute valeur propre de f est égale à 0 ou à -1 .
 - (b) Démontrer que $\mathbb{R}^n = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
 - (c) Soit $p = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n} + f$. Démontrer que p est un projecteur puis que $\operatorname{Ker} p = E_{-1}(f)$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} f$, où $E_{-1}(f)$ désigne le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1 .
2. On suppose dans cette question que toute valeur propre de f est égale à 0 ou à -1 .
 - (a) Démontrer que si f est diagonalisable, alors $f^2 = -f$.
 - (b) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 + A$.
 - (c) Si f n'est pas diagonalisable, le résultat de la question 2.(a) reste-t-il nécessairement vrai ?