Sujet 1

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E. On note $\mathrm{rg}(f)$ le rang de f.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Réciproquement, on suppose que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in [\![-n, n]\!]$, on pose $p_k = \dfrac{(n+1-|k|)}{\alpha}$, où α est un réel strictement positif.

1. Déterminer la valeur de α pour que $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} p_k = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$.
   (a) Quelle est la médiane de X ?
   (b) Quelle est la moyenne de X ?
3. Soient U_1 et U_2 deux variables discrètes et indépendantes de lois uniformes sur l'intervalle d'entiers $[\![0, n]\!]$. On pose $D = U_1 - U_2$.
   (a) Déterminer la loi de D.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$.

Sujet 2

Exercice 1
On considère un entier naturel n non nul et f un endomorphisme inversible de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^3 + f = 0$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier que $f \circ f = -Id$.
2. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que la famille $(u, v, f(u))$ est libre. Montrer que la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est également libre.
3. En déduire que n ne peut être égal à 3.

Exercice 2
Soient $a < c < b$ trois réels. On considère une variable aléatoire réelle X, dont la densité f_X est une fonction affine par morceaux, avec les caractéristiques suivantes :
— f_X est continue sur $\mathbb{R}$;
— $f_X(t) = 0$, si $t \leq a$ ou $t \geq b$;
— f_X est affine sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$.

1. Quelle est la valeur de $f_X(c)$?
2. Donner une expression analytique de la fonction f_X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq c)$.
4. Dans le cas où $c \leq (a + b)/2$, déterminer la médiane de X.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Sujet 3

Exercice 1
Soit $n \geq 2$ un entier. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle , \rangle$ et de $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
Soient a et b deux vecteurs de E orthogonaux et de norme 1. On définit une application f par : $\forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a$.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que pour tout (x, y) de E^2 : $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
3. Déterminer les valeurs propres réelles de f.

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires réelles, dont les densités sont de la forme :

$$f_{X_n}(t) = \alpha_n \cos(\frac{\pi t}{n})\mathbf{1}_{[-\frac{n}{2},\frac{n}{2}]}(t).$$

1. Quelles sont les valeurs de α_n ?
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_{X_n} de la variable aléatoire X_n.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, étudier la limite de $F_{X_n}(t)$ quand $n \to \infty$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$. Que ne passe-t-il quand $n \to \infty$?

Sujet 4

Exercice 1
On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M. On note tr l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace.

1. Montrer que tr est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
5. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
6. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. On note $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   Montrer que la trace de la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que sa densité est donnée par l'expression $f_X(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Proposer un estimateur de λ à partir d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de n réalisations indépendantes de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Justifier votre choix.
3. Soit θ un nombre réel strictement positif. On définit la variable aléatoire Y de la manière suivante :
   — $Y = X$ si $X \leq \theta$;
   — $Y = \theta$ sinon.
   (a) Donner la fonction de répartition de Y.
   (b) En admettant la relation $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq t)dt$, calculer $E(Y)$.
   (c) Proposer un estimateur de λ à partir d'un échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la loi $\mathbb{P}_Y$.

Sujet 5

Exercice 1
On considère E l'espace vectoriel des fonctions f définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, de classe C^2 et telles que $f(0)=0$. On munit E d'un produit scalaire défini par :

$$\forall g,h \in E, \qquad \langle g,h\rangle = \int_0^1 g(t)h(t)dt.$$

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $f \in E$. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(y)dy$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\big(f(x)\big)^2 \leq x \left(\displaystyle\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy\right)$.
4. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy$.
5. Montrer que l'inégalité précédente peut être fausse si l'on retire l'hypothèse $f(0)=0$.
6. Soit λ un réel tel que $\lambda < 2$. En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ non nulle telle que :

$$\forall x \in [0,1],\ -f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0$$

.

Exercice 2
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Rappeler la formule de Bayes.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Calculer $P(X+Y=n)$.
4. On pose $S = X+Y$ et $D = X-Y$.
   (a) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(S,D)$ des variables S et D. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de S et D.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[S=n]$.
   (c) En déduire l'espérance conditionnelle de D sachant $[S=n]$.

Sujet 6

Exercice 1

Pour tout réel $t > 0$, on définit $f(t) = \dfrac{1}{t} \times \exp(-1/t)$.

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Montrer que la fonction ainsi prolongée en 0 est dérivable à droite en 0.
2. Pour tout réel $t \geq 0$, on pose $g(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)dx$.

   Donner un développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage de $t = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation : $(E_n) \quad f(t) = \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, (E_n) admet une unique solution a_n dans $]0, 1[$ et une unique solution b_n dans $]1, +\infty[$.

   (b) Déterminer la monotonie des suites $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ ainsi que leurs limites respectives.

Exercice 2

Soient α un réel strictement plus grand que 4, et X une variable aléatoire de densité $f_X(t) = \dfrac{\beta}{t^{\alpha-1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

1. Quelle est la valeur de β ?
2. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ (on admettra leurs existences).
4. On dispose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de réalisations indépendantes de la loi de X.
   (a) Construire un estimateur de α à partir de la moyenne arithmétique de $(X_1, \ldots, X_n)$.

   (b) En admettant son existence, montrer que $\mathbb{E}(\ln X) = \dfrac{1}{\alpha - 2}$. Construire un nouvel estimateur de α à partir de la moyenne géométrique de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Sujet 7

Exercice 1
Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

On admettra le résultat suivant.
Pour tout (a,b,c) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$. L'égalité étant réalisée lorsque $a = b = c$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ que l'on calculera.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $\exp(2x) + \exp(y) \leq \exp(x+y)(3 - \exp(y))$.

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$, où $\theta \in]0,1[$. On possède un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de réalisations indépendantes de taille $n \in \mathbb{N}^*$ issu de la loi de X. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.
2. On souhaite estimer θ^2.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(T_n^2)$, puis le biais de l'estimateur T_n^2 (ie. $\mathbb{E}(T_n^2) - \theta^2$).
   (b) Pour tout entier j compris entre 1 et n, on pose $T_{n-1}^2(j) = \Big(\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1; i\neq j}^{n} X_i\Big)^2$ et $T_{n-1}^2(j,*) = nT_n^2 - (n-1)T_{n-1}^2(j)$.
      i. Montrer que $T_{n-1}^2(j,*)$ est un estimateur sans biais de θ^2 (i.e. montrer que $\mathbb{E}\big(T_{n-1}^2(j,*)\big) = \theta^2$).
      ii. Proposer un nouvel estimateur « meilleur » de θ^2.

Sujet 8

Exercice 1
On admet le Lemme de Cesaro suivant. Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} (a_1 + ... + a_n)/n = \ell.$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}$.
   (a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est correctement définie.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
   (d) Prouver que la suite $n \longmapsto \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair.
   (a) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n).$$
   (b) Que peut-on dire de la réciproque du Lemme de Cesaro ?

Exercice 2
Soient a et b deux entiers strictement positifs.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières, telle que $\mathbb{P}(X = k) = 1/a - 1/b$ si $1 \leq k \leq ab$, et $\mathbb{P}(X = k) = 0$ sinon.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que la suite de terme général $(\mathbb{P}(X = k))_k$ puisse être considérée comme la loi de probabilité de X ?
2. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X de X.
3. Déterminer l'ensemble des médianes de X.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
5. Résoudre l'équation $\mathbb{E}(X) = m$ en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$.

Sujet 9

Exercice 1
On admet le Lemme de Cesaro suivant. Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} (a_1 + ... + a_n)/n = \ell.$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n/2 + 1/u_n$.
   (a) Etudier la suite $(u_n)_n$.
   (b) Etudier la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_n$.
2. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on pose : $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \geq 1, s_n = \frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n)$.
   Soit $n \geq 2$. Montrer que $u_n - s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kw_k$.
   (b) On suppose que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite. On suppose que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} nw_n = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 2
Soit θ un réel strictement positif et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle X de densité donnée par la relation $f_X(t) = \frac{2t}{\theta^2}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(t)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Proposer un estimateur sans biais de θ (i.e. un estimateur d'espérance égale à θ) à partir de la moyenne arithmétique des $(X_i)_i$. Déterminer la variance de votre estimateur.
3. On considère la variable aléatoire $W_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Pour $\varepsilon > 0$, calculer $\mathbb{P}(|W_n - \theta| > \varepsilon)$. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?