Sujet 1

Question(s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1 \quad .$$

1. Calculer les dérivées partielles de f et exprimer la différentielle totale de f.
2. La fonction f admet-elle un ou des extrema locaux ?

Exercice

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On désigne par I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A et B. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
2. On veut déterminer les matrices M, carrées d'ordre 2 à coefficients réels, vérifiant les conditions :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} M^3 - 3M^2 + 3M & = & A \\ \\ M^2 + 2M & = & B \end{array} \right. \quad .$$

On se donnée une matrice M vérifiant ces conditions.

(a) Montrer les égalités : $(M-I)^3 = A - I$ et $(M+I)^2 = B + I$.

(b) En déduire que $M - I$ et $M + I$ ne sont pas inversibles.

(c) En déduire que la matrice M est diagonalisable et vérifie l'égalité $M^2 = I$.

(d) Déterminer toutes les solutions du système $\mathcal{S}$.

Sujet 2

Question(s)

On considère deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que : $ker(g) \subset ker(f \circ g)$.
2. Montrer que : $Im(f \circ g) \subset Im(f)$.
3. Montrer que si $f \circ g$ est bijectif alors f et g sont également bijectifs.
4. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice

1. Étudier les variations de la fonction définie par :

$$\begin{array}{rrcl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log(x+1) - \log(x) - \dfrac{1}{x} \end{array} .$$

2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\log(n+1) - \log(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (n entier naturel non nul).

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
5. Établir que pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log(n)$.
6. En déduire un encadrement de u_n et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\log(n)} = 1$.

Sujet 3

Question(s)

Soit E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0;1]$. Pour f et g appartenant à E, on définit $L(f,g)$ par

$$L(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

On note Id la fonction identité de E, définie par $Id(x) = x$ pour $x \in [0;1]$.

1. Justifier que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que L est un produit scalaire sur E.
3. Déterminer les fonctions affines orthogonales à Id par le produit scalaire L.

Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

1. (a) Donner le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
   (b) Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.
   Que peut-on dire de la droite d'équation $y = x+1$ pour la courbe représentative de f.
   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   (d) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (e) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \neq 1$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
   $$u_n \geq 2(1+\sqrt{2}) \quad .$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) On admet les résultats suivants :
   Toute suite réelle croissante majorée est convergente.
   Toute suite réelle croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
   On suppose que (u_n) est majorée : que vérifie la limite l de (u_n) ?
   (d) Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Sujet 4

Question(s)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, f et g deux applications linéaires de E dans E. Montrer que

$$\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g) \quad .$$

Exercice

f désigne une fonction continue définissant une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$. On note de plus pour x réel positif,

$$F(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

et

$$g(x) = CF(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

avec C et α réels. De plus, $\alpha > 0$.

1. Montrer que g peut définir une densité et que dans ce cas,

$$C = \left(\int_0^{+\infty} F(u)\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u \right)^{-1} \quad .$$

   Dans la suite, on suppose que g est une densité.

2. Montrer que $C = \dfrac{\alpha}{\varphi_f(\alpha)}$ avec $\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u$.
3. Montrer que

$$\varphi_g(x) = \frac{\alpha}{\varphi_f(\alpha)} \frac{\varphi_f(x+\alpha)}{x+\alpha} \qquad \left(\text{avec}\, \varphi_g(x) = \int_0^{+\infty} g(u)\,\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u \right).$$

   Dans la suite , on admet que φ_g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel,

$$\varphi_g'(x) = -\int_0^{+\infty} u\,g(u)\,\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u \quad .$$

4. Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité g. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\varphi_f'(\alpha)}{\varphi_f(\alpha)} \quad .$$

5. **Application** Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de densité h définie sur $h(x) = \beta^2 x\,\mathrm{e}^{-\beta x}$ pour $x \geq 0$ et $\beta > 0$.
   (a) Montrer que

$$\varphi_h(x) = \left(\frac{\beta}{x+\beta} \right)^2 \quad .$$

   (b) Calculer l'espérance de Y.

Sujet 5

Question(s)

Soit n un entier naturel non nul. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $]0;1[$, solution que l'on notera x_n.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

   On admet que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$.

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1;0;1\}$ telles que

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = a$$

$$\mathbb{P}(Y=-1) = b \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=1) = c$$

avec a, b et c réels.

1. Donner la valeur de a puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Exprimer en fonction de b et c l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
4. U est la variable aléatoire définie par α si $S = 0$, et β sinon, avec α et β réels distincts.
   (a) Montrer que les réels b et c n'apparaissent dans la loi de U.
   (b) Trouver les valeurs de α et β pour que $\mathbb{E}(U) = 3$ et $\mathbb{V}(U) = 2$.
5. (a) Déterminer la loi de S sachant $X = i$ pour $i \in \{-1;0;1\}$.
   (b) Comment faudrait-il alors calculer l'espérance de S sachant que $X = i$?

Sujet 6

Question(s)

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définie comme l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mid x \mid + \mid y \mid = 1$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad .$$

1. Donner une représentation graphique de E.
2. Déterminer le ou les minima de la fonction f sur l'ensemble E.

Exercice

X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi jointe

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = C \frac{a^i b^j}{i! j!}$$

pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, et avec C , a et b réels strictement positifs.

1. Montrer que $C = \mathrm{e}^{-(a+b)}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y, puis identifier ces lois.

3. Déterminer $\mathbb{P}(X = i \mid Y = j)$ puis identifier la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$. Que peut-on en déduire pour les variables aléatoires X et Y ?
4. Soit $S = X + Y$.
   (a) Déterminer la loi de S.
   (b) Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $S = s$?
   (c) Quelle méthode proposeriez-vous pour déterminer l'espérance de X sachant $S = s$?

Sujet 7

Question(s)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $M = XX^T$. Dans cette dernière égalité, X^T désigne la matrice transposée de X.

f désigne l'application linéaire dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

1. Écrire la matrice M.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1- \mid x \mid & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad .$$

1. Tracer la représentation graphique de f.
2. Montrer que f est une densité de loi de probabilité.
3. On note F la fonction de répartition associée à f.
   (a) Que vaut $F(0)$? Interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) Déterminer $F(x)$ pour x réel.
4. On note $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ pour n entier naturel non nul et X la variable aléatoire réelle de loi de densité f.
   (a) Calculer $p_n = \mathbb{P}\left(\mid X \mid > x_n\right)$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq \dfrac{1}{2}$.
5. Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Sujet 8

Question(s)

Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 + 4z^2 + 8yz$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\left(Q(u+v) - Q(u-v)\right) \quad .$$

1. Justifier que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{-\beta-1} & \text{si } x \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec C, α et β réels. De plus, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1. On admet f peut définir une densité de probabilité. Montrer que l'on a alors $C = \beta\alpha^\beta$.

   On suppose que f est une densité de probabilité pour les questions qui suivent et on note X une variable aléatoire de loi de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition F associée à la loi de densité f.
3. Représenter graphiquement F si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.
4. On suppose que $\beta > 2$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.
5. On pose $Y = \log \dfrac{X}{\alpha}$.
   (a) Quel est le signe de Y ?
   (b) Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Sujet 9

Question(s)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et u l'application linéaire de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'image et le noyau de f.
2. Étudier les valeurs propres de f.

Exercice

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi dont on note F la fonction de répartition. On désigne par Y_n la variable aléatoire définie comme le minimum des $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que l'on notera $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. De plus, G_n est la fonction de répartition de Y_n.

1. Montrer que pour y réel, $G_n(y) = 1 - (1 - F(y))^n$.
2. **Application :** les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi suivie par Y_n.

   On revient au cas général dans la suite de l'exercice.

3. Soit β un réel et α un réel strictement positif. On note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \alpha\, n\, F(Y_n) + \beta$. On suppose de plus que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que Z_n prend ses valeurs dans un intervalle $I_{n,\alpha,\beta}$ que l'on précisera.
   (b) Soit H_n la fonction de répartition de Z_n. Pour z réel dans l'intervalle $I_{n,\alpha,\beta}$, montrer que $H_n(z) = 1 - \left(1 - \dfrac{z-\beta}{\alpha n}\right)^n$.
   (c) Soit c un nombre réel. Justifier que

   $$\lim_{n \to +\infty} n \log\left(1 + \frac{c}{n}\right) = c \quad .$$

   (d) En déduire la limite de $H_n(z)$ quand n tend vers l'infini.