Sujet 1

Question

Soient X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,5)$. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
Donner un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une telle loi.

Exercice

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n, \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases} .$$

1. (a) Déterminer la matrice carrée A telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} .$$

   (b) En déduire que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. (a) Soient $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de la matrice A.
   Préciser pour chacun la valeur propre associée.

   (b) Diagonaliser la matrice A.

3. Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.

Sujet 2

Question

Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, au voisinage de 0 (ln est le logarithme népérien).
Quel est le signe de $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x$ lorsque x est proche de 0 ?

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donné par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2α	3α	3α
2	3α	2α	3α
3	3α	3α	2α

avec α réel.

1. Calculer la valeur de α.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Quelles sont les espérances $E(X)$ et $E(Y)$?
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Soit M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$. Déterminer la loi conditionnelle de M sachant $Y = 2$.

Sujet 3

Question

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)\left(\frac{1}{2} - x\right)(y - x^3)$.
Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner l'ensemble $E_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geqslant x^3\}$.
Représenter, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points où la fonction f prend des valeurs strictement positives.

Exercice

Soit α un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ e^{\alpha - x} & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases} .$$

On admet que f définit une densité de probabilité.
Dans la suite X désigne une variable aléatoire de loi de densité f.

1. Calculer la probabilité $P_{[X \geqslant \alpha+1]}(X \geqslant \alpha + 2)$.
2. On considère la variable aléatoire $Y = X - \alpha$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   (b) Montrer que F_Y correspond à la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle dont on précisera le paramètre β.
   (c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
   On admet que $X_1 - 1, X_2 - 1, ..., X_n - 1$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes.
   (a) Soit $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - 1)$. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[S_n] = a$.
   (b) Le risque quadratique de S_n est défini par

   $$r_n = \mathbb{E}\left[(S_n - a)^2\right] \quad .$$

   Calculer r_n et déterminer sa limite quand $n \to +\infty$.

Sujet 4

Question

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. X désigne une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Pour tout entier n non nul, déterminer l'expression M_n du moment d'ordre n de X.
On suppose $|b| > |a|$. La suite $(M_n)_n$ converge-t-elle ?

Exercice

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ et à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini pour les fonctions $f, g \in E$ par $< f, g >= \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On note $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$.
On note a la fonction cos, b la fonction sin sur $[0, \pi]$, Id l'identité sur $[0, \pi]$.
On souhaite calculer

$$M = \min_{x,y\in\mathbb{R}} \int_0^\pi (xa(t) + yb(t) - t)^2 \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que a et b sont orthogonaux, i.e. vérifient $< a, b >= 0$.

2. On cherche $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x_0a + y_0b - Id$ soit orthogonal à a et à b.
   (a) Justifier que $< x_0a+y_0b-Id, a >= 0$ si et seulement si $x_0. < a, a >=< Id, a >$.
   (b) En déduire la valeur de x_0.
   (c) Déterminer y_0.

   Dans la suite x_0 et y_0 sont les valeurs trouvées précédemment.
3. Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^\pi (xa(t) + yb(t) - t)^2 dt = \|x_0a + y_0b - Id\|^2 + \|(x - x_0)a + (y - y_0)b\|^2.$$

4. En déduire que $M = \|x_0a + y_0b - Id\|^2$. Calculer M.
5. Illustrer par un dessin la démarche suivie pour calculer M.

Sujet 5

Question

Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles M est inversible. Donner l'inverse lorsqu'elle existe.

Exercice

1. Soient A et B deux réels positifs. Montrer que $AB \leqslant \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$.
2. Soient a et b deux réels. Montrer que
$$\exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(a) + \exp(b)}{2} \quad .$$
3. On note ln le logarithme népérien.
   Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$.
   (a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f''.
   (b) Justifier que f est concave.
   (c) En déduire que pour tous réels a et b strictement supérieurs à 1,
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \times \ln b} \quad .$$
4. (a) Donner la définition de la convexité pour une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Soit φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que $E(\varphi(X)) \leqslant \varphi(E(X))$.

Sujet 6

Question

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 (c'est-à-dire dérivables de dérivée continue).
Vérifier si l'application suivante est un produit scalaire sur F ou pas :

$$\begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & < f,g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt. \end{array}$$

Exercice

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3;0,1)$.
   On fixe $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire e^{tX} prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$.
   (b) Remplir le tableau donnant la loi de e^{tX} en renseignant les probabilités :

y_i	1	e^t	e^{2t}	e^{3t}
$P(e^{tX} = y_i)$				

.

   (c) Montrer que
   $$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \left(0,9 + 0,1\,\mathrm{e}^t\right)^3 \quad .$$
   Pour la suite de la question 1, on note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right].$$
   (d) Soient φ' et φ'' les dérivées première et seconde de φ sur $\mathbb{R}$. Justifier les égalités
   $$\varphi'(t) = \mathbb{E}\left[X\,\mathrm{e}^{tX}\right]$$
   et
   $$\varphi''(t) = \mathbb{E}\left[X^2\,\mathrm{e}^{tX}\right].$$
   (e) En déduire l'espérance et la variance de X.
2. Traiter les questions (a) (b) (c) de la question 1 si X désigne plus généralement une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ $(0 < p < 1)$.
3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(3;0,1)$ et que Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2;0,1)$. On suppose X et Y indépendantes.
   On note pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right]$, $\psi(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tY}\right]$ et $\chi(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right]$. Relier les trois fonctions φ, ψ et χ.

Sujet 7

Question

Soit I_2 la matrice identité de taille 2. Décrire le plus précisément possible l'ensemble des matrices carrées réelles de taille 2, vérifiant $A^2 + A - 2I_2 = 0$.

Exercice

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

où σ est strictement positif. On note F la fonction de répartition de X.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Justifier que X et $-X$ suivent la même loi.
3. Montrer que pour tout réel x, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
4. Soit $Y = |X|$. On admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est la fonction définie par :
   $$F_Y(x) = \begin{cases} 2F(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$
   (b) Dériver F_Y sur $]0, +\infty[$.
   Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
   (c) Calculer $E(Y)$.
5. On suppose dans cette question que σ est inconnu et on se propose de l'estimer. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Montrer $\mathbb{E}(S_n) = C\sigma$ avec C constante.
   (b) Proposer un estimateur T_n sans biais de σ, c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(T_n) = \sigma$, construit à partir de S_n.
   (c) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}\left(Y^2\right), \mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}\left(S_n\right)$.
   (d) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ, c'est-à-dire $\mathbb{E}\left[(T_n - \sigma)^2\right]$.
   Quelle est la valeur limite de ce risque quand n tend vers l'infini ?

Sujet 8

Question

Soit a un réel strictement positif. X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Z = aX$ et on admet que Z ainsi définie est une variable aléatoire. Déterminer la loi de Z.

Exercice

On note ln la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis : si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si M est un réel vérifiant $|h'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $|h(a) - h(b)| \leqslant M|a - b|$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
2. Dériver f, en déduire son tableau de variations.
3. Que vaut $f(\mathbb{R}_+^*)$?
4. On fixe $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
   (b) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note ℓ.
   (c) Montrer que la suite est convergente $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et calculer sa limite.
   (d) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ on ait
   $$|u_n - \ell| \leqslant c^{n-1}|u_1 - \ell|.$$
5. On fixe $\rho \in]0, \frac{1}{2}[$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x - \rho f'(x)$.
   (a) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Montrer que si $x \in I$, $|g(x) - g(1)| \leqslant |x - 1|$. En déduire que $g(I) \subset I$.
   (c) On définit la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ par $\begin{cases} v_0 \in I \\ v_{n+1} = g(v_n) \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$. Montrer que la suite converge vers ℓ.

Sujet 9

Question

Une golfeuse s'entraîne : elle tire à partir d'un repère situé à 10m du trou. Elle essaye de placer la balle de golf à moins de 2m du trou. Si elle rate, elle ramasse la balle et recommence, jusqu'à réussir.
On note $X_1, X_2, X_3, \ldots$ la distance entre la balle et le trou (en mètres) lors du premier tir, du deuxième tir, du troisième tir, ... On suppose que les X_i sont indépendantes et de même loi donnée par la densité

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{25} & \text{si } 0 \leqslant x < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{x}{25} & \text{si } 5 \leqslant x < 10 \\ 0 & \text{si } 10 \leqslant x. \end{cases}$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tir nécessaires pour obtenir un succès.
Quelle est la loi de Y ?

Exercice

On munit du $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire et de la norme standard : $<(x,y),(x',y')>= xx' + yy'$ et $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -3x+4y$ et $g(x,y) = x^2+y^2-1$.
On note $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; g(x,y) = 0\}$.

1. Dessiner l'ensemble C.
2. On souhaite étudier les éventuels maximums de f sur l'ensemble C.
   (a) Calculer un vecteur non-nul s du noyau H de f.
   (b) Calculer un vecteur u orthogonal à H, unitaire, vérifiant $f(u) > 0$.
   (c) Vérifier que (u,s) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (d) Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha u + \beta s \in C$ si et seulement si $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \|s\|^2 = 1$.
   En déduire que $\alpha u + \beta s \in C$ implique $|\alpha| \leqslant 1$.
   (e) Conclure sur l'étude des éventuels maximums de f sur C.
   (f) Illustrer la démarche utilisée par un dessin.
3. Que dire d'éventuels minimums de f sur C ?

Sujet 10

Question

On suppose que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable, de dérivée continue), et vérifiant $f(1) = -1$, $f'(1) = 3$.
Donner le développement limité à l'ordre 2, en 0, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$.

Exercice

Soit E l'espace vectoriel formé des fonctions polynômiales de second degré

$$E = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2;\ \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

On note P' la dérivée de la fonction P, par exemple $(1 + X + \frac{1}{3}X^2)' = 1 + \frac{2}{3}X$.
Soit f l'application de E dans E donnée par $f(P) = 2P + P'$.
On note Id l'application identité de E : $Id(P) = P$ pour tout $P \in E$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E.
3. Calculer le noyau $Ker(f)$.
4. Calculer l'image $Im(f)$.
5. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi l'application $n = f - 2Id$ vérifie $n^3 = 0$, où on note $n^3 = n \circ n \circ n$.
6. Par convention on pose $n^0 = Id$.
   Montrer que $Ker(n^0) \subset Ker(n^1) \subset Ker(n^2) \subset Ker(n^3)$.
7. Justifier que $Ker(n^2) \neq Ker(n^3)$.
8. On fixe $u \in Ker(n^3) \backslash Ker(n^2)$.
   (a) Montrer que $(n^2(u), n(u), u)$ est une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de n dans la base $(n^2(u), n(u), u)$?
   (c) Donner un exemple de $u \in Ker(n^3) \backslash Ker(n^2)$.