

## Sujet 6

### Question

Rappeler la définition d'un sous-espace propre.

Déterminer le ou les sous-espaces propres associés à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

### Exercice

1. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \ln x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que  $\varphi$  est une densité de probabilité.

2. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $\varphi$  comme densité.

(a) Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

(b) Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , le moment d'ordre  $k$  de  $X$ , c'est-à-dire l'espérance  $E(X^k)$ .

(c) Calculer la variance de  $X$ .

3. On considère  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, admettant toutes  $\varphi$  pour densité. On pose  $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

(a) Calculer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$ .

(b) Calculer  $F'_Z(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$ .