
Concours interne d'attaché statisticien de l'Institut national de la statistique et des études économiques

Année 2026

Épreuve de Mathématiques et Statistiques

Durée : 4 heures

Le sujet comporte 9 pages y compris celle-ci.

- Calculatrice autorisée
- Le présent document comprend 2 problèmes indépendants. Sauf consignes particulières, les résultats seront donnés avec une décimale.
- Il sera tenu compte de la présentation, de la pertinence et de la clarté des commentaires.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
- Le candidat ne doit porter aucun signe distinctif sur les copies : pas de signature, nom, grade, même fictifs.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.

Problème 1.....

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit

scalaire euclidien défini, pour tous vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la famille de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier $1 \leq i \leq n$, e_i est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la composante numéro i qui vaut 1. On rappelle que (e_1, e_2, \dots, e_n) constitue alors une base orthonormée pour l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

La matrice identité I_n est la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1.

Soit A une matrice de taille $n \times p$ à coefficients réels, pour p un entier naturel non nul. La *transposée* de $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la matrice notée A^T , obtenue en inversant les lignes et les colonnes de A , autrement dit la matrice $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$. On dit que A est *symétrique* si A est une matrice carrée (*i.e.* $n = p$) égale à sa transposée, autrement dit si $A^T = A$. On dit que A est *orthogonale* si A est carrée et si $A^T A = A A^T = I_n$.

On admet le résultat suivant : pour toute matrice symétrique S de taille $n \times n$ à coefficients réels, il existe une matrice D diagonale de taille $n \times n$ et une matrice P orthogonale de taille $n \times n$ telles que $S = P^T D P$.

On appelle *graphe non orienté* tout couple $G = (V, E)$ où :

- V est un ensemble fini d'éléments appelés *sommets* ;
- E est un ensemble de paires $\{u, v\}$ avec $u, v \in V$. Une telle paire s'appelle une *arête* du graphe (u et v sont aussi dits voisins dans G et on notera indifféremment $u \sim v$ ou $v \sim u$).

Dans tout ce qui suit on suppose que $V = \{1, 2, \dots, n\}$. On appelle *matrice d'adjacence* du graphe G la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ **symétrique** telle que :

- $a_{i,j} = 1$ si $\{i, j\} \in E$ (si $i \sim j$) ;
- $a_{i,j} = 0$ sinon.

Pour tout $1 \leq i \leq n$ le *degré* du sommet i est l'entier $d_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ qui comptabilise le nombre

de ses voisins. On note D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ et $L = D - A$. La

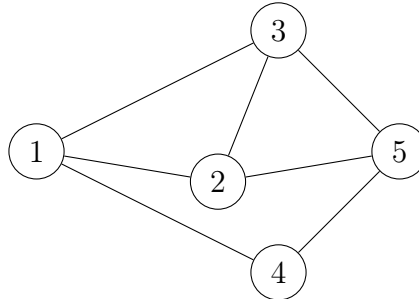
matrice L s'appelle le *laplacien* du graphe G .

Partie A : un premier exemple

Dans cette partie on considère le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ avec $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

On le représente par le schéma ci-dessous :



1. (a) Ecrire sa matrice d'adjacence A_1 .
- (b) Ecrire sa matrice des degrés D_1 .
- (c) Ecrire son laplacien L_1 .
- (d) Justifier que L_1 est diagonalisable dans \mathbb{R} .
- (e) Démontrer que 0 est valeur propre de L_1 et donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.
- (f) On note c_j la colonne numéro j de L_1 . Démontrer que les colonnes c_1, c_2, c_3 et c_4 sont linéairement indépendantes. En déduire $\text{rg } L_1$ et $\dim \text{Ker } L_1$.
- (g) Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?

Partie B : étude du laplacien L dans le cas général

Dans cette partie, on revient au cas général. On considère donc un graphe $G = (V, E)$ avec L sa matrice d'adjacence, D la matrice diagonale des degrés de ses sommets et L son laplacien.

2. (a) Justifier que L est une matrice symétrique.
- (b) Démontrer que 0 est valeur propre de L et donner un vecteur propre associé à cette valeur propre.

- (c) Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on note $q(x) = x^T L x$. Démontrer l'égalité

$$x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (x_i - x_j)^2$$

- (d) En déduire que $x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$.
- (e) En déduire que $q(x) \geq 0$ pour tout x dans \mathbb{R}^n .
- (f) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n / q(x) = 0\} \neq \{0\}$.
- (g) Démontrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

- (h) Justifier l'existence d'une matrice diagonale $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ à coefficients positifs ou nuls et d'une matrice orthogonale P de taille $n \times n$ à coefficients réels telles que $L = P^T \Lambda P$.
- (i) En déduire qu'il existe une matrice symétrique M telle que $L = M^2$.
- (j) En déduire que $x^T Lx = 0$ si et seulement si $Lx = 0$.
- (k) Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker } L \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = 1 \Rightarrow x_i = x_j)$$

Partie C : composantes connexes d'un graphe

3. On appelle *chaîne* reliant $u \in V$ à $v \in V$ toute suite finie de sommets $(u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_p) \in V^p$ telle que $u_1 = u$, $u_p = v$ et $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq p-1$. On définit une relation binaire \mathcal{R} sur V de la façon suivante :

$$(u \mathcal{R} v) \Leftrightarrow (\text{il existe une chaîne reliant } u \text{ à } v \text{ ou } u = v)$$

- (a) Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Ses classes sont appelées les *composantes connexes* du graphe G .
- (b) Représenter le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$, où $V_1 = \{1, 2, \dots, 9\}$ et

$$E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}\}$$

Quelles sont les composantes connexes de G_1 ?

On rappelle qu'il a été démontré dans la partie B que $x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$.

4. On note C_1, C_2, \dots, C_k les composantes connexes du graphe G . Pour $1 \leq j \leq k$, on note $\mathbb{1}_{C_j}$ le vecteur de \mathbb{R}^n dont la composante numéro i est égale à $\mathbb{1}_{C_j}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in C_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
Démontrer que les vecteurs $\mathbb{1}_{C_1}, \mathbb{1}_{C_2}, \dots, \mathbb{1}_{C_k}$ constituent une base orthogonale de $\text{Ker } L$.
5. En déduire que le nombre de composantes connexes du graphe G est égal à la dimension de $\text{Ker } L$.
6. Démontrer que quelle que soit la base (u_1, u_2, \dots, u_k) de $\text{Ker } L$ choisie, si U désigne la matrice de colonnes u_1, u_2, \dots, u_k , alors on a l'équivalence :

$$(i_1 \text{ et } i_2 \text{ sont dans la même composante connexe}) \Leftrightarrow l_{i_1} = l_{i_2}$$

où l_{i_1} et l_{i_2} désignent les lignes numéros i_1 et i_2 de la matrice U .

7. Expliquer comment la matrice U permet de détecter les composantes connexes du graphe G .

Application : pour un graphe G , on a calculé

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les composantes connexes de ce graphe.

Problème 2.....

Partie A : préliminaires

On rappelle les propriétés élémentaires sur les nombres complexes :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre complexe e^{ix} est défini par la relation : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$;
- pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un $r > 0$ et un $\theta \in \mathbb{R}$, tels que $z = re^{i\theta}$;
- pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

On dit qu'une fonction f appartient à l'ensemble $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$, s'il existe deux fonctions f_r et f_i de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que $f = f_r + if_i$. On définit alors l'intégrale de f sur tout intervalle de type $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$ par la relation : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_r(t)dt + i \int_a^b f_i(t)dt$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{i\frac{x+y}{2}} \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
3. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ et pour tout complexe $\mu \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$\int_0^1 (f + \mu g)(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \mu \int_0^1 g(t)dt.$$

4. Pour tout $\lambda \in [0, 2\pi]$, calculer $\int_0^1 e^{i\lambda t} dt$; puis calculer $\int_0^1 |1 - e^{i\lambda t}| dt$.
5. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\int_0^1 \varphi'(t)e^{i\varphi(t)} dt = \frac{e^{i\varphi(1)} - e^{i\varphi(0)}}{i}$.
6. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_0^1 \psi(t)\varphi'(t)e^{i\varphi(t)} dt = \frac{1}{i}(\psi(1)e^{i\varphi(1)} - \psi(0)e^{i\varphi(0)} - \int_0^1 \psi'(t)e^{i\varphi(t)} dt).$$

7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$, montrer que $|\int_0^1 f(t)dt| \leq \int_0^1 |f(t)|dt$.
8. Soit la fonction sinus cardinal définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par la relation : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction sinus cardinal sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (c) Montrer que la fonction sinus cardinal admet un inverse sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (notée sinc^{-1}).

Partie B : points aléatoires sur le cercle unité

Soient X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$, on admet que le théorème de transfert reste valide :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^1 f(t)dt, \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(f(X)) = \mathbb{E}(|f(X)|^2) - |\mathbb{E}(f(X))|^2.$$

On admettra également que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C})$:

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dy \right) dx.$$

9. Calculer $\mathbb{E}(e^{i\pi X})$ et $\mathbb{E}(e^{2i\pi X})$.
10. On pose $L_X = |1 - e^{2i\pi X}|$. Calculer $\mathbb{E}(L_X)$. Quelle est votre interprétation géométrique de ce résultat ?
11. Montrer que $\mathbb{V}(L_X) = 2 - \frac{16}{\pi^2}$.
12. On pose $L_{XY} = |e^{2i\pi X} - e^{2i\pi Y}|$.
 - (a) Montrer que :

$$\mathbb{E}(L_{XY}) = 2 \int_0^1 \left[\int_0^x \sin \pi(x - y)dy + \int_x^1 \sin \pi(y - x)dy \right] dx.$$

- (b) Montrer ensuite que :

$$\int_0^x \sin \pi(x - y)dy + \int_x^1 \sin \pi(y - x)dy = \frac{2}{\pi}.$$

- (c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(L_{XY})$.
13. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose $m(a, b) = \mathbb{E}(e^{i(aX+b)})$.
 - (a) Calculer la valeur du module $|m(a, b)|$. Vérifier que cette quantité est indépendante de b et montrer qu'elle tend vers 0 quand $|a|$ tend vers l'infini.
 - (b) Donner un argument de $m(a, b)$.
 - (c) À partir d'un échantillon $(e^{i(aX_1+b)}, \dots, e^{i(aX_n+b)})$, proposer un estimateur convergent de a , quand $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 - (d) En déduire un estimateur de b modulo (2π) .

Partie C : un peu de géométrie

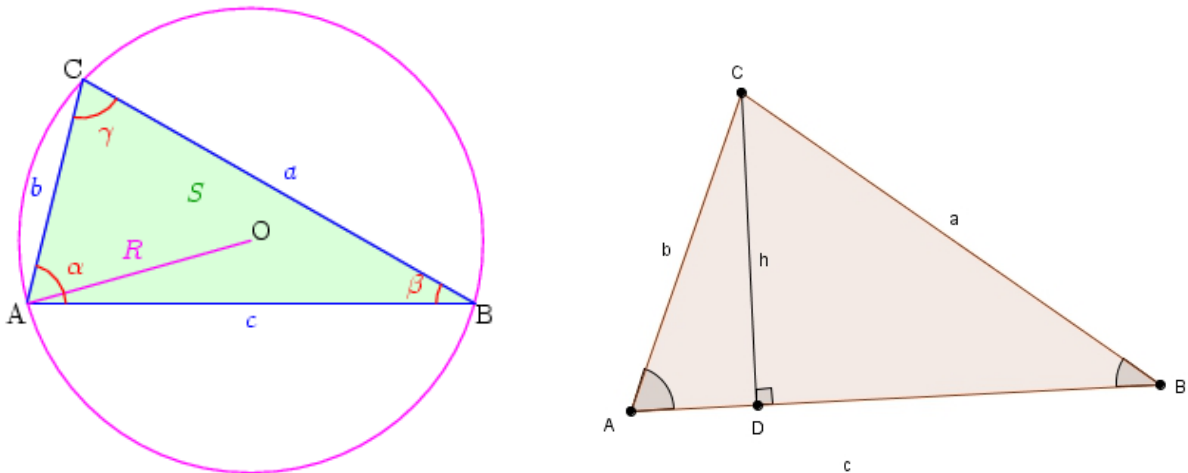


FIGURE 1 -- Configuration d'un triangle ABC

On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R, dont les angles et les longueurs des côtés sont reportés comme sur la figure 1.

14. Montrer que $h = b \sin \alpha = a \sin \beta$.
15. En déduire la loi des sinus : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S}$, où S désigne la surface du triangle.
16. Montrer que $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$. (*indication : penser au théorème de l'angle inscrit*)
17. Montrer que $\frac{abc}{2S} = 2R$.
18. Reprenons les éléments de la partie précédente. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$. On considère le triangle T du cercle unité formé par les points : $1, e^{2i\pi X}$ et $e^{2i\pi Y}$.
 - (a) Donner l'espérance du périmètre P de ce triangle.
 - (b) Montrer que $\mathbb{E}(L_X L_{XY}) = \frac{16}{\pi^2}$.
 - (c) Déterminer la covariance de L_X et de L_{XY} . Commenter votre résultat.
 - (d) En admettant que $\mathbb{E}(L_{XY}^2) = 2$, déterminer la variance de P.
 - (e) Donner une expression simple de la surface S de ce triangle en fonction de L_X, L_Y et L_{XY} .
 - (f) Montrer que $\mathbb{E}(S) = \frac{3}{2\pi}$.
 - (g) En admettant que $\mathbb{E}(S^2) = \frac{1}{2}$ et que $\mathbb{E}(SP) = \frac{16}{\pi^2}$, déterminer la covariance entre S et P. Commenter votre résultat.
 - (h) Déterminer le coefficient de corrélation entre S et P.

Partie D : comportements asymptotiques

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle qu'il existe $\rho > 0$ vérifiant $\forall t \in [0, 1], \varphi''(t) \geq \rho$.

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de la quantité $I(\lambda) = \mathbb{E}(e^{i\lambda\varphi(X)})$ quand X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et λ est un réel strictement positif.

19. On suppose dans cette question que pour tout t dans le segment $[0, 1]$, $\varphi'(t) \neq 0$.

(a) Expliciter une valeur $m > 0$, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $|\varphi'(t)| \geq m$.

(b) En écrivant que $I(\lambda) = \int_0^1 \frac{i\lambda\varphi'(t)}{i\lambda\varphi'(t)} e^{i\lambda\varphi(t)} dt$, puis en effectuant une intégration par parties, montrer que $|I(\lambda)| \leq \frac{3}{\lambda m}$.

20. On suppose dans cette question que $\varphi'(0) = 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t \in [\varepsilon, 1]$, $|\varphi'(t)| \geq \rho\varepsilon$. (on rappelle que $\forall t \in [0, 1], \varphi''(t) \geq \rho$)

(b) Montrer que $|I(\lambda)| \leq \varepsilon + \left| \int_\varepsilon^1 e^{i\lambda\varphi(t)} dt \right|$.

(c) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$, telle que $|I(\lambda)| \leq \varepsilon + \frac{A}{\lambda\rho\varepsilon}$.

(d) Pour quelle valeur de ε , la quantité $\varepsilon + \frac{A}{\lambda\rho\varepsilon}$ est minimale ?

(e) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de λ telle que $|I(\lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda\rho}}$.

21. Donner un majorant de $|I(\lambda)|$ dans le cas où $\varphi'(c) = 0$ pour un $c \in]0, 1[$.