

③ Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2}$$

④ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$

Donc $v_n - u_n \geq 0$

soit $\frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$

ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0$ d'après la question 3)

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est donc croissante pour tout entier naturel n .

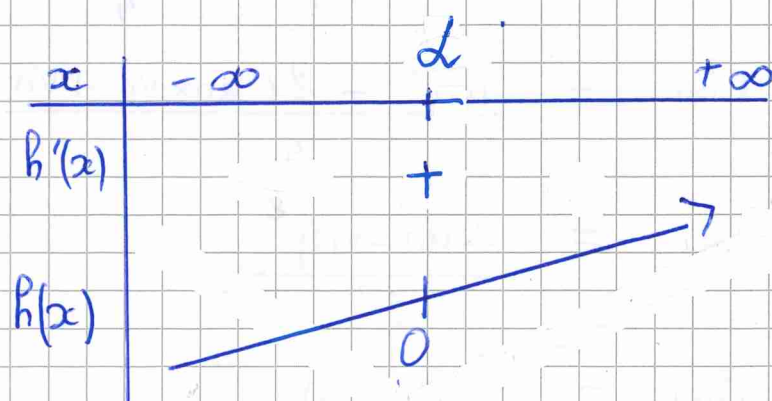
Exercice 4:

$h(x) = 2x^3 + 6x + 2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 6x^2 + 6$

$\forall x \in \mathbb{R}, 6x^2 + 6 > 0$

Donc la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$.



CONCOURS Contrôleur externe de l'INSEE

ANNÉE 2024

INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N°

Note :

19,75

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

ÉPREUVE

de Mathématiques et Statistiques

NOMBRE D'INTERCALAIRES : 5

Exercice 1:

① a

② b

③ c

④ d

⑤ i) d

ii) e

⑥ b

⑦ d

Exercice 2:

① Moyenne = $\frac{130 \times 6 + 140 \times 3 + 145 \times 3 + 148 \times 2 + 150 \times 5 + 160 \times 2 + 170 \times 4 + 200 \times 2 + 230 \times 3 + 450 \times 1}{31}$

$$= \frac{52250}{31}$$

$$\approx 1685,48$$

Le salaire net moyen des employés est environ de 1685,48 €

(2) $31:2 = 15,5$; on peut trouver la 16^{ème} valeur grâce aux effectifs cumulés.
Médiane = 16^{ème} valeur = 1500 €

Le salaire médian des employés est de 1500 €.

(3) Le salaire moyen est supérieur au salaire médian.

La moyenne étant sensible aux valeurs extrêmes, l'employé qui a un salaire de 4500 € fait augmenter la moyenne. → contrairement à la médiane

④ L'écart type est ^{la racine carrée de} la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

C'est un indicateur de dispersion. Plus il est grand, plus la série est dispersée autour de la moyenne.

$$\text{Ecart type} = \sqrt{\frac{6 \times (1300 - 1625)^2 + 3 \times (1400 - 1625)^2 + \dots + 1 \times (4500 - 1625)^2}{31}}$$

écart type $\approx \underline{591,0125}$

(5) $\frac{3}{4} \times 31 = 23,25$ $Q_3 = 24$ ème valeur = 1710

$$\frac{1}{7} \times 31 = 7,75 \quad Q_1 = 8^{\text{ème}} \text{ valeur} = 1400$$

$$\text{Ecart interquartile} = Q_3 - Q_1 = 1710 - 1400 = \boxed{310}$$

⑥ voir papier millimétré (intercalaire n°1)

⑦ $3 + 3 + 2 + 5 + 2 = 15$ $\frac{15}{31} \times 100 \approx 48,39$

Il y a 15 employés gagnant entre au minimum 1400 € et au maximum 1600 €, soit environ 48,33 % des employés de l'entreprise.

Exercice 3 :

Exercice 3				
Partie 1		Etape 1	Etape 2	
1)	n	0	1	2
	a	2	$\frac{2+1}{2} = 3$	$\frac{3+3,2}{2} = 3,1$
	b	4	$\sqrt{\frac{2^2+4^2}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,2$	$\sqrt{\frac{3^2+3,2^2}{2}} \approx 3,1$
	x	2	3	3,1
	y	4	3,2	3,1

→ l'algorithme s'arrête car $n \geq N$

Le résultat de cet algorithme est :

$a = 3,1$
$b = 3,1$

Partie 2 pour tout entier naturel n ,

$$2) \quad v_{n+1}^p - u_{n+1}^p = \left(\sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} \right)^2 - \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2$$

$$V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 = \frac{U_n^2 + V_n^2}{2} - \frac{U_n^2 + 2 \times U_n \times V_n + V_n^2}{4}$$

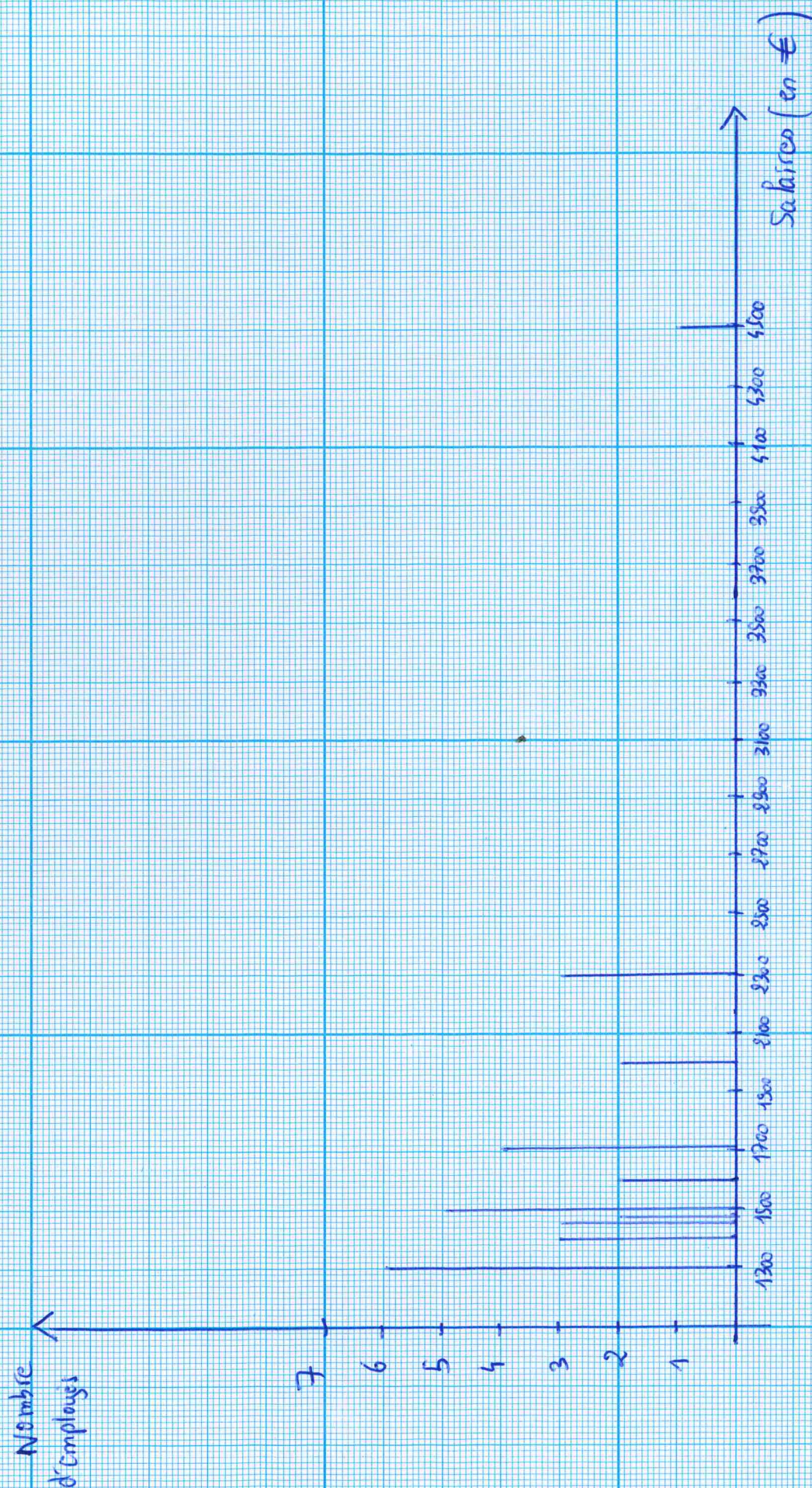
$$V_{m1}^2 - U_{m1}^2 = \frac{2u^2 + 2v^2 - u^2 - 2xu \cdot xv - v^2}{4}$$

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 - 2 \times u_n \times v_n + v_n^2}{4}$$

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{(u_n - v_n)^2}{2^2}$$

$$V_{n+1}^p - u_{n+1}^q = \left(\frac{u_n - v_n}{2} \right)^2$$

Effectif des employés en fonction de leur salaire mensuel net



② h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ↗ car dérivable

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + 6x + 2 = +\infty \quad \begin{array}{l} \text{en faisant la somme des limites} \\ \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 6x + 2 = -\infty \quad \begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 6x = -\infty \end{array}$$

$$0 \in]-\infty; +\infty[.$$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

$$f(-0,4) \approx -0,528 < 0 \quad \text{et} \quad f(-0,3) \approx 0,146 > 0$$

donc

$$\boxed{-0,4 < \alpha < -0,3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x^3} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{En faisant le produit des limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} \times x = +\infty \end{array} \right.$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{2 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \boxed{-\infty}$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x^3} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

En faisant le produit des limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \times x}{1} = -\infty$

$$\textcircled{4} \quad f'(x) = \frac{(6x^2) \times (x^2 + 1) - 2x(2x^3 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 + 6x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{x \times h(x)}{(x^2 + 1)^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 1)^2 > 0$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x \times h(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-1	$+\infty$

d'après 2)

$h(x) = 0$ lorsque $x = \alpha$
 $h(x) > 0$ pour $x > \alpha$
 $h(x) < 0$ pour $x < \alpha$

$$f(0) = \frac{2 \times 0^3 - 1}{0^2 + 1} = -1$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 - 1}{\alpha^2 + 1} \approx -0,97$$

Donc f est croissante sur $]-\infty; \alpha] \cup [\alpha; +\infty[$
 f est décroissante sur $[\alpha; 0]$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ax + \frac{bx+c}{x^2+1} &= \frac{ax(x^2+1) + bx + c}{x^2+1} \\
 &= \frac{ax^3 + ax + bx + c}{x^2+1} \\
 &= \frac{ax^3 + (a+b)x + c}{x^2+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{or } f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Il existe donc 3 nombres réels a, b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^2+1}$

$$\text{Et on a donc } \boxed{f(x) = 2x + \frac{-2x - 1}{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{-2x - 1}{x^2 + 1} - 2x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 1}{x^2 + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} &= 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \\
 \text{et par quotient des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \frac{0}{1} = 0
 \end{aligned}$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0$
la courbe C admet donc une asymptote oblique
d'équation $y = 2x$ en $+\infty$.

⑧ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f(1) = \frac{2 \times 1^3 - 1}{1^2 + 1} = 0,5$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 1^4 + 6 \times 1^2 + 2 \times 1}{(1^2 + 1)^2} = \frac{2 + 6 + 2}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$y = 2,5(x-1) + 0,5 = 2,5x - 2,5 + 0,5 = 2,5x - 2$$

l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est :

$$y = 2,5x - 2$$

⑨ les abscisses des points pour lesquels C admet une tangente horizontale sont les abscisses x tels que $f'(x) = 0$

$$\text{soit } \frac{2x \times f(x)}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\text{c'est à dire : } x = 0 \text{ ou } f(x) = 0$$

$$x = 2$$

C admet 2 tangentes horizontales aux points d'abscisses :

$$x = 0 \text{ et } x = 2$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	Mathématique et Statistiques	4/5

Exercice 5 :

$$\textcircled{1} \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

L'aire du domaine hachurée est de $\ln 2$ u.a, soit environ $0,69$ u.a
 $1 \text{ u.a} = 9 \text{ cm}^2$ $0,69 \times 9 \approx \underline{6,21 \text{ cm}^2}$

$$\textcircled{2} \text{ Aire du domaine grisée} = 1 \times 1 - \int_2^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= 1 - \left[\ln|x| \right]_2^3$$

$$= 1 - (\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \underline{1 - \ln 3 + \ln 2 \text{ u.a}}$$

$$\approx \underline{0,59 \text{ u.a}}$$

$$\approx 0,59 \times 9 \text{ cm}^2, \text{ soit } \underline{5,31 \text{ cm}^2}$$

$\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$ Intercalaire n° 5

Exercice 6 :

$$\textcircled{1} \begin{cases} a+b+c=70 \\ b=2a+1 \\ c=3b+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=70 \\ b=2a+1 \\ c=3(2a+1)+3=6a+6 \end{cases}$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

$$\begin{cases} a+b+c=70 \\ b=2a+1 \\ c=6a+6 \end{cases}$$

$$a+b+c=70$$

par substitution :

$$a+(2a+1)+(6a+6)=70$$

$$9a+7=70$$

$$9a=63$$

$$a=\frac{63}{9}$$

$$\underline{a=7}$$

$$b=2 \times a+1=2 \times 7+1=\underline{15}$$

$$c=6 \times a+6=6 \times 7+6=42+6=\underline{48}$$

On a donc : $a=7$; $b=15$ et $c=48$
 $(7+15+48=70)$

les trois nombres entiers sont 7 ; 15 et 48

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & L_1 \begin{cases} x+y+z=4 \\ L_2 \begin{cases} x+2y+z=5 \\ L_3 \begin{cases} x-y=-1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Par combinaison :

$$\begin{aligned} & L_2 - L_1 \begin{cases} y=1 \\ L_2 \begin{cases} x+2+Z=5 \\ L_3 \begin{cases} x-y=-1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L_3 \begin{cases} y=1 \\ x=-1+y=-1+1=0 \\ L_2 \begin{cases} 0+2+Z=5 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

la solution du système est $x=0$; $y=1$; $z=3$

