



**Concours externe d'administrateur de
l'Institut national de la statistique et des études économiques**

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

Le sujet comporte 6 pages y compris celle-ci.

- Tous documents et appareils électroniques interdits.
- L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour la moitié de la note finale. Chaque partie contient plusieurs exercices ou problèmes indépendants.
- Il sera tenu compte de la présentation, de la pertinence et de la clarté des commentaires.

Partie 1: analyse et algèbre.

Problème.

Dans tout le problème, p , q et f désignent trois fonctions définies et continues sur $[0, 1]$. De plus, la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et les fonctions p et q vérifient :

$$\forall x \in [0, 1], \quad p(x) > 0 \quad q(x) \geq 0.$$

On note H l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles s'annulant en 0 et en 1 :

$$H = \{u \in \mathcal{C}^1[0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0\}.$$

Pour tout couple (u, v) éléments de H , on pose

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 (u(t)v(t) + u'(t)v'(t)) dt$$

$$\varphi(u, v) = \int_0^1 (q(t)u(t)v(t) + p(t)u'(t)v'(t)) dt$$

$$L(v) = \int_0^1 f(t)v(t) dt.$$

I. Études de produits scalaires.

1. Enoncer et redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire quelconque. Etudier le cas d'égalité.
2. Justifier l'existence de quatre réels positifs p_0, q_0, p_1 et q_1 tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1.$$

3. (a) Montrer que H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
(b) Montrer que L est une forme linéaire sur H .
(c) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur H .
On note, pour le reste du problème, $\|\cdot\|$ la norme associée, i.e. $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
(d) Montrer que φ est un produit scalaire sur H .
4. (a) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t) dt \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur E .

- (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire l'existence d'un réel γ positif tel que

$$\forall v \in H, \quad |L(v)| \leq \gamma \|v\|.$$

5. Montrer de même qu'il existe un réel δ strictement positif tel que

$$\forall (u, v) \in H^2, \quad |\varphi(u, v)| \leq \delta \|u\| \|v\|.$$

On explicitera le réel δ en fonction de p_1 et de q_1 .

6. (a) Montrer que

$$\forall v \in H, \quad \forall x \in [0, 1], \quad v^2(x) \leq x \int_0^1 (v'(t))^2 dt.$$

(b) En déduire que

$$\forall v \in H, \quad p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} \varphi(v, v).$$

7. Soit $v \in H$. Donner un encadrement de $\|v\|$ à l'aide de $\sqrt{\varphi(v, v)}$.

8. On suppose qu'il existe une fonction u de H vérifiant

$$\forall v \in H, \quad \varphi(u, v) = L(v).$$

Montrer qu'une telle fonction u , si elle existe, est unique.

II. Application à l'étude d'une équation différentielle.

On s'intéresse ici aux fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ vérifiant l'équation dite *de Sturm-Liouville* :

$$\forall x \in [0, 1], \quad -p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

Aucune connaissance préalable sur les équations différentielles n'est ici requise.

On admet dans toute la suite du problème que les fonctions p , q et f sont choisies de telle sorte que l'équation différentielle (1) admette une solution u vérifiant

$$u(0) = u(1) = 0.$$

On remarquera qu'une telle fonction u est un élément de H .

1. On se place, dans cette question seulement, dans le cas particulier :

$$p : x \mapsto e^{-x} \quad q : x \mapsto 0 \quad \text{et} \quad f : x \mapsto 1.$$

(a) Soit $u \in H$. Montrer que la fonction u est solution de l'équation (1) si et seulement si il existe un réel λ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad u'(x) = (\lambda - x) e^x.$$

(b) Déterminer l'unique fonction u de H solution de l'équation différentielle (1).

2. On revient au cas général. Soit $u \in H$ une fonction solution de (1).

Montrer que

$$\forall v \in H, \quad \varphi(u, v) = L(v).$$

3. En utilisant les résultats de la Partie I, montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution dans H .

4. Pour tout élément $v \in H$, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2} \varphi(v, v) - L(v).$$

On désigne par u l'unique solution de l'équation différentielle (1) dans H .

(a) Pour tout $w \in H$, exprimer $J(u + w)$ en fonction de $J(u)$ et de $\varphi(w, w)$.

(b) Montrer que

$$\forall v \in H, \quad J(u) \leq J(v).$$

Préciser pour quelle(s) valeur(s) de v l'égalité est réalisée.

(c) Réciproquement, soit $u_0 \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad J(u_0) \leq J(v).$$

En calculant $J(u_0 + \lambda w)$ pour tout $w \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall w \in H, \quad \varphi(u_0, w) = L(w).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice.

Le but de ce problème est d'étudier le développement en série de Engel des réels de $]0, 1]$. On note E l'ensemble des suites croissantes d'entiers supérieurs à 2.

Pour toute suite $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on note $S_n(q) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 \cdots q_k}$.

I. Préliminaires.

- Déterminer la limite de $(S_n(q))$ dans les cas suivants :
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = p$, où $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = n + 2$.
- Montrer que pour tout $q \in E$, $(S_n(q))$ converge vers un réel de $]0, 1]$.

II. Existence du développement de Engel.

$\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Dans toute cette partie, on fixe $x \in]0, 1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = x, \quad q_n = 1 + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \quad x_{n+1} = q_n x_n - 1.$$

- Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.
- Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x = S_n(q) + \frac{x_{n+1}}{q_0 \cdots q_n}.$$
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(q)$.
- Soit $a \geq 3$.
 - Montrer que l'équation $x^2 - ax + 1 = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1]$. On note cette solution $r(a)$. On ne demande pas de l'explicitier.
 - On suppose $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $x = r(a)$, alors $a = 1 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
 - Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 3. On note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies comme précédemment en posant $x = r(p)$.
Montrer que si $x_n = r(q_n)$ alors $x_{n+1} = r(q_n^2 - 2)$.
 - Conclure que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$q_0 = p \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{n+1} = q_n^2 - 2.$$

Partie 2 : probabilités et statistiques.

Notations:

v.a. signifie variable aléatoire et v.a.i.i.d. variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées.

$\mathbb{P}[A|B]$ est la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

$\mathbb{E}[X|Y]$ est l'espérance conditionnelle de la v.a. X sachant la v.a. Y .

$\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ représentent respectivement l'espérance et la variance d'une v.a. X , lorsque ces quantités existent.

Exercice 1.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

et de fonction de répartition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et pour tout $x > 0$,

$$\rho_n(x) = \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq x\right].$$

1°. Déterminer la loi de S_n/n et en déduire que

$$\forall x > 0, \rho_n(x) = \mathbb{P}[|X_1| \geq x\sqrt{n}] = 2\mathbb{P}[X_1 \geq x\sqrt{n}] = 2(1 - \Phi(x\sqrt{n})).$$

2°. Démontrer que,

$$\forall x > 0, \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

3°. En déduire l'inégalité de concentration gaussienne suivante:

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x\sqrt{n}} - \frac{1}{x^3 n^{3/2}}\right) e^{-nx^2/2} \leq \rho_n(x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x\sqrt{n}} e^{-nx^2/2}.$$

4°. Rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et les redémontrer.

5°. Soit h une fonction positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Après avoir justifié de l'existence de l'espérance, démontrer que pour toute v.a. positive, intégrable et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(t)}.$$

6°. En déduire que

$$\forall x > 0, \rho_n(x) \leq 2e^{-tx\sqrt{n}} \mathbb{E}[e^{tX_1}]$$

après avoir justifié l'existence de l'espérance.

7°. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[e^{tX_1}] = e^{t^2/2}.$$

8°. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \rho_n(x) \leq 2e^{-nx^2/2}.$$

Exercice 2.

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On notera $q = 1 - p$. L'événement $[X_n = 1]$ représente un succès au n -ième tirage.

1°. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir un premier succès. Démontrer que

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}[Y = k] = q^{k-1}p.$$

Déterminer l'expression de l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ et de la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y , en fonction de p et q .

2°. On considère deux v.a. indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi géométrique de paramètre p . On note $S = Y_1 + Y_2$. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \mathbb{P}[S = n] = np^2q^{n-2}.$$

3°. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[Y_1 = k | S = n]$. Interpréter le résultat.

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la somme des n premiers tirages et T_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir n succès. On dit que T_n suit une loi de Pascal de paramètres n et p .

4°. Reconnaître la loi suivie par S_n , puis démontrer que pour tout $k \geq n$,

$$[T_n = k] = [S_{n-1} = k - 1] \cap [X_n = 1].$$

5°. En déduire que

$$\forall k \geq n, \mathbb{P}[T_n = k] = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

6°. On pose $Y_1 = T_1$ et pour tout $i \geq 2$, $Y_i = T_i - T_{i-1}$. Montrer que les $(Y_i)_i$ forment une suite de variables de loi géométrique de paramètre p . Montrer qu'elles sont mutuellement indépendantes et que

$$T_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

7°. Déterminer $\mathbb{E}[T_n]$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

8°. On note V_n le nombre d'échecs dans la séquence $(X_i)_i$ nécessaires avant d'obtenir n succès. On dit que V_n suit une loi binomiale négative de paramètres n et p . Démontrer que pour tout $n \geq 1$, V_n et T_n sont liées par la relation suivante:

$$T_n = V_n + n.$$

En déduire que

$$\forall k \geq 0, \mathbb{P}[V_n = k] = \binom{k+n-1}{k} p^n q^k.$$

9°. Démontrer que

$$\mathbb{E} \left[\frac{n-1}{T_n-1} \right] = p \text{ et } \mathbb{E} \left[\frac{n}{T_n} \right] > p,$$

après avoir justifié de l'existence de ces espérances.

10°. On suppose p inconnu et on souhaite l'estimer à partir des observations. Démontrer que la suite de v.a. $(n/T_n)_n$ converge en probabilité et préciser sa limite. En déduire un estimateur $\hat{p}$ de p . Est-il biaisé ? Proposer un estimateur $\tilde{p}$ non biaisé.

11°. On suppose n et p inconnus. On considère une suite $(W_i)_i$ de v.a.i.i.d. dont chaque élément W_i suit la même loi que T_n . Déduire de la question 7° des estimateurs $\hat{n}$ et $\hat{p}$ de n et p mettant en jeu la moyenne et la variance empirique de $W_1, \dots, W_i$. Déterminer de même des estimateurs $\tilde{n}$ et $\tilde{p}$ de n et p à partir d'une suite $(W_i)_i$ de v.a.i.i.d. dont chaque élément suit la même loi que V_n . Quels problèmes peuvent poser ces derniers estimateurs ?

Epreuve écrite d'économie
Durée de l'épreuve : 4h
Tous documents et appareils électroniques interdits

Dissertation (13 points)

Comment expliquer la coexistence d'un chômage élevé et de tensions sur le marché du travail ?

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

L'objectif de cet exercice est d'analyser la production d'un bien public environnemental. Les candidats expliqueront soigneusement chacun de leurs résultats. Les questions 4, 5 et 6 peuvent être traitées indépendamment des questions 2 et 3.

Envisageons une économie où deux consommateurs (A et B) vivent deux périodes ($t = 1, 2$). Ils disposent d'un revenu R_1 pendant la première période et R_2 pendant la seconde période. Nous supposons que $R_1 = R_2 = R$. On note c_{1A} et c_{2A} la valeur des consommations privées de l'individu A en $t = 1$ et $t = 2$. De même, c_{1B} et c_{2B} représentent la valeur des consommations privées de l'individu B en $t = 1$ et $t = 2$.

q désigne la qualité de l'air. Celle-ci vaut $q_1 = \bar{q}$ en $t = 1$ et $q_2 = \bar{q} - \delta + x$ en $t = 2$ où $\bar{q}$ est la qualité de l'air initiale, δ la dégradation de la qualité de l'air provoquée par la pollution et x la quantité d'un bien public permettant de réduire les émissions de carbone. On suppose que $c_{1A} > 0$, $c_{2A} > 0$, $c_{1B} > 0$, $c_{2B} > 0$ et $x > 0$.

Les préférences inter-temporelles des consommateurs sont représentées par les fonctions suivantes :

$$V_A = [\log(c_{1A}) + \log(\bar{q})] + \beta\gamma_A[\log(c_{2A}) + \log(q_2)] \quad (1)$$

$$V_B = [\log(c_{1B}) + \log(\bar{q})] + \beta\gamma_B[\log(c_{2B}) + \log(q_2)] \quad (2)$$

où γ_A et γ_B sont les taux de survie des consommateurs A et B en $t = 2$, et $\beta \leq 1$ est le taux de préférence pour le présent.

On note $CT(x)$ le coût de production de x unités de bien public. Nous supposons qu'il existe un décalage d'une période entre l'achat du bien public et son effet sur la qualité de l'air. Par conséquent, chaque consommateur i contribue en $t = 1$ au financement de la production du bien public x permettant de réduire la pollution en $t = 2$. On note ces contributions τ_{1A} et τ_{1B} .

1. Expliquez pour quelle raison $c_{2A} = c_{2B} = R$ et déterminez l'ensemble des allocations réalisables. Un vecteur (c_{1A}, c_{1B}, x) est une allocation réalisable si les consommations de biens privés sont compatibles avec le financement du bien public et si $c_{1A} \geq 0$, $c_{1B} \geq 0$ et $x \geq 0$.

A. Le planificateur

2. Considérons un planificateur dont l'objectif est de maximiser la somme pondérée des utilités inter-temporelles des deux consommateurs : $\alpha V_A + (1 - \alpha)V_B$ où α est le poids accordé au consommateur A par le planificateur. Écrivez le programme de maximisation du planificateur. Montrez que l'équilibre économique est caractérisé par l'égalité du coût marginal du bien public et la somme des taux marginaux de substitution du bien privé au bien public. Interprétez.
3. Supposons que $CT(x) = x$. Définissez l'optimum de Pareto associé à $\tau_{1A} = \tau_{1B}$. Calculez le vecteur (c_{1A}, c_{1B}, x) pour $\beta\gamma_A = \frac{3}{4}$, $\beta\gamma_B = \frac{1}{2}$, $\bar{q} = 5$, $R = 5$ et $\delta = 2$.

B. La souscription libre

4. Á présent, chaque consommateur détermine librement le montant de sa contribution pour améliorer la qualité de l'air. Écrivez le programme de maximisation de chaque consommateur et déterminez la contribution de chacun en fonction de $\beta\gamma_A$ et $\beta\gamma_B$ (Les fonctions de réaction).
5. Calculez l'équilibre de souscription libre pour $\beta\gamma_A = \frac{3}{4}$, $\beta\gamma_B = \frac{1}{2}$, $\bar{q} = 5$, $R = 5$ et $\delta = 2$. Faire une représentation graphique. Est-ce un optimum de Pareto ? Interprétez.
6. Supposons que $\tau_{1B} = 0$. En utilisant le résultat de la question 4, caractérisez l'effet d'une hausse du taux de survie γ_A sur τ_{1A} . Expliquez ce résultat.