

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

---

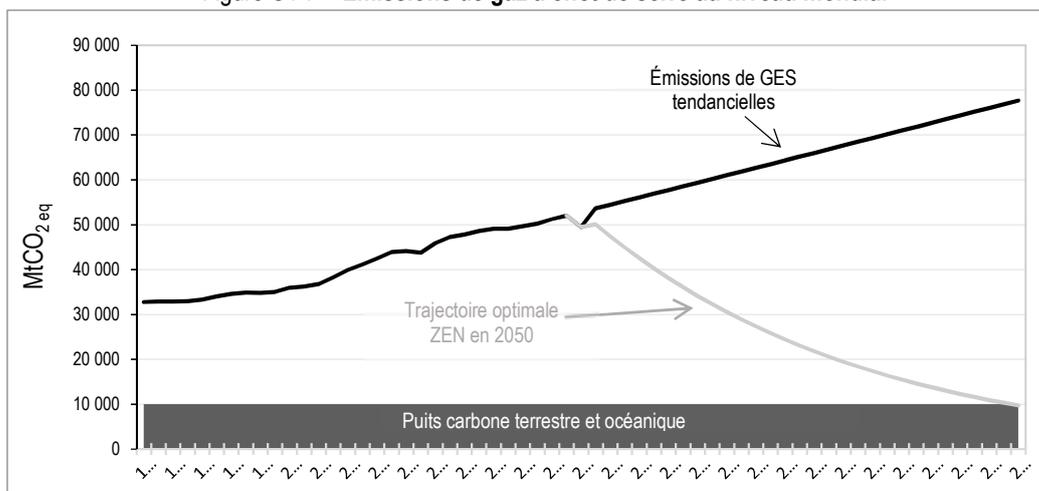
**Annexe en ligne C1 – De l'inventaire à l'empreinte carbone : une réduction de nos émissions pour partie liée à la délocalisation de nos activités**

---

Les émissions de GES considérées dans cet article sont les émissions générées par la production réalisée sur le territoire national, encore appelées « inventaire national ». C'est en ces termes que sont formulées les stratégies nationales bas carbone car, depuis le protocole de Kyoto, c'est sur ces émissions que portent les engagements internationaux. Cette notion d'inventaire carbone se distingue d'une autre notion, « l'empreinte carbone », qui mesure l'ensemble des émissions liées à notre mode de vie. Le passage de l'inventaire à l'empreinte s'obtient en retirant les émissions de CO<sub>2</sub> des biens et services destinés à l'exportation et en ajoutant ceux provenant des importations. L'empreinte carbone mesure ainsi l'ensemble des émissions liées à notre mode de vie. Elle représente notre contribution nette totale à l'ensemble des émissions mondiales.

À ce niveau mondial, ces émissions annuelles de gaz à effet de serre s'élèvent à 52 GtCO<sub>2eq</sub> en 2019, soit 7.2 tonnes par habitant et par an. Elles n'ont cessé de progresser depuis 1990 pour atteindre aujourd'hui 158 % du niveau de 1990. S'agissant de l'intensité carbone, elle est en recul de 1 % l'an sur la période 1990-2018. Si l'on projette cette tendance, les émissions atteindraient alors, en 2050, environ 240 % du niveau de 1990, comme l'indique la figure C1-I qui fournit également la trajectoire optimale de retour à la neutralité carbone mondiale à l'horizon 2050<sup>1</sup> résultant de notre modèle. Contrairement à l'économie nationale, la croissance mondiale ne peut être considérée comme stationnaire : certaines économies, notamment la Chine, sont en rattrapage, tandis que d'autres poursuivent leur transition démographique. Au global, la croissance va se ralentir notablement à horizon 2050, de 0.5 % dans notre modèle pour une moyenne de 2.5 % sur l'ensemble de la période de projection 2020-2050.

Figure C1-I – Émissions de gaz à effet de serre au niveau mondial



Source : World Bank Data, calculs des auteurs.

Au sein de ces émissions mondiales, l'empreinte carbone 2019 de la France est de 739 MtCO<sub>2eq</sub>, soit une part de 1.4 %, pour un inventaire de 439 Mt ; 431 Mt sont importées pour 131 Mt exportées, soit un bilan net carbone des échanges extérieurs de 300 Mt. Faible en 1990 (48 Mt CO<sub>2</sub> soit 8 % de l'empreinte carbone), le contenu en CO<sub>2</sub> des échanges n'a cessé d'augmenter pour atteindre les 40 % en 2019. Au total, alors que l'inventaire carbone est en baisse depuis le milieu des années 2000, l'empreinte est restée stable. Pour mesurer l'empreinte carbone, l'équation  $E_t = \sigma_t * Y_t$  devient

$$E_t = \sigma_{t,FR} * (Y_t - X_t) + \sigma_{t,Monde} * M_t,$$

---

<sup>1</sup>Nous retenons une valeur moyenne de 10Gt de CO<sub>2</sub> pour le puits carbone mondial, ce qui constitue un plancher. En effet le GIEC a estimé à entre 5 et 13 Gt les émissions absorbées annuellement par le puits terrestre, et à entre 6 et 12 celles absorbées par le puits océanique ; par ailleurs le changement d'affectation des terres (déforestation) a un impact évalué à entre 2 et 6 Gt (Les chiffres du climat 2018 , CGDD, p. 14).

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch

*Annexes en ligne / Online Appendices*

où  $X_t$  et  $M_t$  représentent respectivement les exportations et les importations françaises, supposées stables en pourcentage du PIB.

En projection, la poursuite des tendances tant nationale que mondiale aboutirait, sans surprise, à une stabilité de l'empreinte carbone française malgré la baisse de 1 % l'an des émissions nationales. Dans le cas d'un respect de la neutralité carbone à horizon 2050, tant nationalement qu'au niveau mondial, l'empreinte convergerait vers l'inventaire national.

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

---

**Annexe en ligne C2 – Résolution analytique du cas général et stratégies d'épargne**

---

On se place ici dans le cas plus général où le taux d'épargne est endogène, et où les préférences collectives peuvent accorder un poids plus ou moins important aux générations futures. Le temps est considéré ici comme une variable discrète  $t = 0, 1, \dots, T$ .

*La dynamique d'accumulation du capital*

Nous construisons un modèle macroéconomique avec une fonction de production de type :  $Y_t = K_t^\alpha (A_t * L_t)^{1-\alpha}$ . Pour faciliter l'analyse, nous travaillons directement par unité de travail efficace en utilisant les lettres minuscules. Il ressort donc une nouvelle équation de production de la forme suivante :

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \left( \frac{K_t}{A_t L_t} \right)^\alpha = k_t^\alpha = f(k_t) \quad (1)$$

Nous avons également une relation entre taux de croissance de l'intensité carbone et dépense climat de la forme suivante :

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t (1 - \varepsilon * \sigma_t^{\theta-1} * \Lambda_t) \quad (2)$$

À chaque période, l'économie produit un bien qui peut soit être consommé, soit être épargné et donc investi en capital physique.  $C_t$  désigne la quantité de bien consommée à chaque période  $t$ , tandis que  $s_t$  désigne le taux d'épargne, c'est-à-dire la part de la production annuelle qui est investie en capital physique. Le capital physique est durable mais il se déprécie à chaque période au taux  $\delta \in [0; 1]$ .

À chaque période, les dépenses climat viennent réduire d'autant la consommation totale, soit :

$$C_t = Y_t - s_t Y_t - D_t = (1 - s_t - \Lambda_t) Y_t$$

Nous supposons que  $K_0 > 0$  est un stock exogène donné de capital initial. Le stock de capital total suit ensuite la loi d'évolution :

$$K_{t+1} = K_t + s_t Y_t - \delta K_t = K_t (1 - \delta) + Y_t (1 - \Lambda_t) - C_t$$

En passant en quantité par unité de travail efficace, on obtient :

$$(1 + g) k_{t+1} = f(k_t) * (1 - \Lambda_t) - c_t + (1 - \delta) k_t \quad (3)$$

où  $1 + g = (1 + n)(1 + \gamma)$  et  $c_t = C_t / A_t L_t$  la consommation par unité de travail efficace.

*Le programme d'optimisation du planificateur social*

Nous supposons ici l'existence d'un planificateur social omniscient qui cherche à maximiser le bien-être social de l'économie. Une autre option serait de résoudre le problème via un équilibre concurrentiel décentralisé des différents agents économiques. On identifie ici le bien-être social à une forme d'utilité intertemporelle des ménages, en fonction de la consommation par unité de travail efficace et d'un facteur d'actualisation  $\beta$  à définir en fonction de l'équité intergénérationnelle souhaitée.

On a :  $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ , où  $\rho$  désigne le paramètre prenant en compte les effets sur le bien-être monétaire ressenti du seul passage du temps.

Cette utilité intertemporelle peut donc prendre la forme suivante :

$$U = \sum_{t=0}^T \beta^t * u(c_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t * \frac{(c_t)^{1-\tau}}{1-\tau} \quad (4)$$

où  $\tau > 0$  détermine la courbure de la fonction d'utilité instantanée  $u$  définie par la forme suivante de type CRRA (*constant relative risk aversion*) :

$$u(x) = \frac{x^{1-\tau}}{1-\tau}$$

$u$  vérifie  $u' > 0$  et  $u'' < 0$ .

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

$u' > 0$  implique que le consommateur préfère plus que moins et  $u'' < 0$  implique que l'utilité marginale décroît avec le niveau de consommation.

Le paramètre  $\tau$  désigne l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle. Plus  $\tau$  est grand, plus l'utilité marginale décroît vite lorsque  $c_t$  augmente, c'est-à-dire que l'agent a moins intérêt à dévier par rapport à un profil de consommation uniforme. Lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , on arrive à une fonction d'utilité instantanée linéaire, tandis que le cas  $\tau \rightarrow +\infty$  correspond au cas d'une élasticité de substitution intertemporelle nulle, c'est-à-dire un cas limite où l'utilité ne dépend que de la plus petite valeur, correspondant ainsi au cas particulier du maximin présenté en section 2.

Pour simplifier, nous utilisons la notation vectorielle suivante :  $\vec{X} = (X_0, \dots, X_T)$  correspondant à une allocation sur l'horizon considéré de la quantité  $X$ .

Le planificateur doit déterminer à chaque période la consommation, le stock de capital, le niveau des dépenses climat et l'intensité carbone de l'économie. Autrement dit, il s'agit de déterminer une allocation de  $\{\vec{c}, \vec{k}, \vec{\Lambda}, \vec{\sigma}\}$  pour maximiser (4) sous les contraintes (2) et (3). Formellement, nous avons donc deux variables d'état – le capital par unité de travail efficace  $\vec{k}$  et l'intensité de carbone de l'économie  $\vec{\sigma}$  – et deux variables de contrôle – la consommation par unité de travail efficace  $\vec{c}$  et l'effort climat  $\vec{\Lambda}$  –.

*Résolution du problème du planificateur*

Posons  $\vec{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_T)$  et  $\vec{\nu} = (\nu_0, \dots, \nu_T)$  deux séquences de multiplicateurs de Lagrange positifs ou nuls. Pour trouver une allocation optimale, nous définissons la Lagrangien comme suit :

$$\mathcal{L}(\vec{c}, \vec{k}, \vec{\Lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \sum_{t=0}^T \{ \beta^t u(c_t) + \mu_t (f(k_t)(1 - \Lambda_t) + (1 - \delta)k_t - c_t - (1 + g)k_{t+1}) + \nu_t (\sigma_t(1 - \varepsilon\sigma_t^{\theta-1}\Lambda_t) - \sigma_{t+1}) \}$$

puis résolvons le problème min-max suivant :  $\min_{\vec{\mu}, \vec{\nu}} \left( \max_{\vec{c}, \vec{k}, \vec{\Lambda}, \vec{\sigma}} \mathcal{L}(\vec{c}, \vec{k}, \vec{\Lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \right)$

Il s'agit donc d'abord d'annuler les dérivées partielles du Lagrangien. Notre fonction d'utilité et les contraintes permettent d'assurer qu'une allocation qui respecte les conditions nécessaires du premier ordre satisfait également les conditions de second ordre.

Nous avons donc les **conditions du premier ordre** suivantes :

$$\text{en } c_t : \quad \beta^t u'(c_t) - \mu_t = 0 \quad \text{pour tout } t = 0, 1, \dots, T \quad (5)$$

$$\text{en } k_t : \quad \mu_t [(1 - \delta) + f'(k_t) * (1 - \Lambda_t)] - \mu_{t-1} (1 + g) = 0 \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T \quad (6)$$

$$\text{en } \Lambda_t : \quad -\mu_t * f(k_t) + \nu_t \varepsilon * \sigma_t^\theta = 0 \quad \text{pour tout } t = 0, 1, \dots, T \quad (7)$$

$$\text{en } \sigma_t : \quad -\nu_t * (1 - \varepsilon\theta\sigma_t^{\theta-1}\Lambda_t) + \nu_{t-1} = 0 \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T \quad (8)$$

Les **conditions terminales** sont la neutralité carbone en 2050 et le capital par unité de travail efficace sur un nouvel état stationnaire à  $T + 1$  (l'état stationnaire post-2050 est traité au paragraphe suivant) :

$$k_{T+1} = k_{eq} \\ \sigma_{T+1} Y_{T+1} = E_{2051}$$

Posons  $r_t^g$  le taux d'intérêt net (vert) :  $r_t^g = f'(k_t) * (1 - \Lambda_t) - \delta$

En combinant (5) and (6), on obtient :

$$u'(c_t) \left[ \frac{1 + r_t^g}{1 + \rho} \right] = u'(c_{t-1}) * (1 + g) \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T$$

Soit en dérivant la fonction d'utilité instantanée :

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch

*Annexes en ligne / Online Appendices*

$$(c_t)^{-\tau} \frac{1+r_t^g}{1+\rho} = (c_{t-1})^{-\tau} (1+g) \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T$$

On obtient ainsi la **règle d'Euler verte** :

$$c_t = c_{t-1} \left[ \frac{1+r_t^g}{(1+\rho)(1+g)} \right]^{1/\tau} = c_{t-1} \left[ \frac{1+r_t^g}{(1+\rho)(1+g)} \right]^{1/\tau} \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T \quad (9)$$

Lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ , la règle d'Euler verte devient :  $c_t = c_{t-1}$ , c'est-à-dire une consommation par unité de travail efficace constante dans le temps. On retombe bien sur l'approche maximin présentée dans la section 2, avec  $\rho = \gamma$  et une quantité  $[C_t/L_t]/(1+\rho)^t$  constante.

Une autre approche consiste à considérer non pas le taux pur de préférence pour le présent de l'approche utilitarienne, mais le taux auquel la consommation par tête est actualisée et auquel la littérature se réfère sous le terme de taux d'escompte social de Dasgupta *et al.* (1999). Cela revient à inclure dans la fonction d'utilité instantanée le paramètre d'escompte, soit :

$$U = \sum_{t=0}^T u \left( \beta^t \frac{C_t}{L_t} \right)$$

Lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ , la règle d'Euler verte devient alors :  $c_t = \frac{1+\rho}{1+\gamma} c_{t-1}$ , ce qui revient au cas précédent lorsque  $\rho = \gamma$ .

En combinant (7) and (8), on obtient pour tout  $t=1,2,\dots,T$  :

$$1 - \varepsilon \theta \sigma_t^{\theta-1} \Lambda_t = \frac{v_{t-1}}{v_t} = \frac{\mu_{t-1}}{\mu_t} * \frac{f(k_{t-1})}{f(k_t)} * \left( \frac{\sigma_{t-1}}{\sigma_t} \right)^\theta \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \dots, T$$

Comme  $\frac{\sigma_{t-1}}{\sigma_t} = 1 - \varepsilon \theta \sigma_{t-1}^{\theta-1} \Lambda_{t-1}$  et  $\frac{\mu_{t-1}}{\mu_t} = \frac{1+r_t^g}{1+g}$

on obtient la **règle d'arbitrage climatique** :

$$\frac{1 - \varepsilon \theta \sigma_t^{\theta-1} \Lambda_t}{(1 - \varepsilon \theta \sigma_{t-1}^{\theta-1} \Lambda_{t-1})^\theta} = \frac{1+r_t^g}{1+g} * \left( \frac{k_{t-1}}{k_t} \right)^\alpha$$

Pour  $\theta = 1$ ,

$$\frac{1 - \varepsilon \Lambda_t}{1 - \varepsilon \Lambda_{t-1}} = \frac{1+r_t^g}{1+g} * \left( \frac{k_{t-1}}{k_t} \right)^\alpha = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1} * (1 - \Lambda_t) + (1 - \delta)}{1+g} * \left( \frac{k_{t-1}}{k_t} \right)^\alpha$$

Cette équation nous indique comment entre deux périodes, l'évolution de l'effort climat est liée à l'évolution du capital par unité de travail efficace. Plus précisément, cette règle d'arbitrage traduit le raisonnement économique suivant. Plaçons-nous sur un sentier d'équilibre, et à un instant  $t - 1$  diminuons la dépense climat d'un certain montant  $\eta$ . À consommation constante, cette quantité est utilisée pour augmenter le stock de capital en  $t+1$  de  $(1+r_t^g)\eta$ , quantité que l'on utilise ensuite pour les dépenses de décarbonation en  $t+1$  afin de revenir sur le sentier d'équilibre.

Ceci se démontre analytiquement :

$$\text{A l'instant } t, \text{ l'intensité carbone s'écrit : } \frac{E_t}{Y_t} = \frac{E_{t-1}}{Y_{t-1}} \left[ 1 - \varepsilon \left( \Lambda_{t-1} - \frac{\eta}{Y_{t-1}} \right) \right]$$

$$\text{Soit en } t+1 : \frac{E_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{E_t}{Y_t} \left[ 1 - \varepsilon \left( \Lambda_t + \frac{\eta(1+r_t^g)}{Y_t} \right) \right] = \frac{E_{t-1}}{Y_{t-1}} \left[ 1 - \varepsilon \left( \Lambda_{t-1} - \frac{\eta}{Y_{t-1}} \right) \right] \left[ 1 - \varepsilon \left( \Lambda_t + \frac{\eta(1+r_t^g)}{Y_t} \right) \right]$$

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

Si on était resté sur le sentier d'équilibre initial, l'intensité carbone en  $t+1$  s'écrirait :

$$\frac{E_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{E_{t-1}}{Y_{t-1}} (1 - \varepsilon \Lambda_{t-1})(1 - \varepsilon \Lambda_t)$$

En développant et en identifiant les termes en  $\eta$ , on obtient bien la règle d'arbitrage climatique :

$$(1 - \varepsilon \Lambda_{t-1}) \varepsilon \frac{(1+r_t^g)}{Y_t} = (1 - \varepsilon \Lambda_t) \varepsilon \frac{1}{Y_{t-1}}, \text{ soit : } \frac{1-\varepsilon \Lambda_t}{1-\varepsilon \Lambda_{t-1}} = \frac{1+r_t^g}{1+g} * \left(\frac{k_{t-1}}{k_t}\right)^\alpha$$

Alternativement, on peut forcer la contrainte  $\Lambda_t = \text{constante}$ , ce qui correspond à un effort climat qui serait fixé *ex-ante* par les pouvoirs publics, et non déterminé par une règle d'arbitrage avec la rentabilité du capital. Dans un tel cas, les agents peuvent toujours ajuster leur taux d'épargne, i.e. leur consommation, pour maximiser l'utilité intertemporelle.

Au final, on dispose donc d'un cadre englobant notre scénario de référence permettant d'évaluer des stratégies alternatives d'épargne et de décarbonation.

*L'équilibre stationnaire post 2050 et les conditions initiales*

- À l'état stationnaire post 2050, toutes les quantités sont constantes ou croissent à taux constant. Nous nous plaçons dans une situation où le capital par unité de travail efficace a atteint sa valeur d'équilibre et reste constant  $k_t = k_{eq}$ . Ainsi, la production par unité de travail efficace est également constante  $y_t = y_{eq} = k_{eq}^\alpha$ , donc le PIB par tête croît au rythme du progrès technique  $\gamma$  et le PIB croît au rythme  $g$ .

La quantité  $c_t/c_{t-1}$  étant constante, l'équation (9) implique que le taux d'intérêt  $r_t^g = r_{eq}^g$  est constant, c'est-à-dire que la quantité  $f'(k_t) * (1 - \Lambda_t)$  l'est également, tout comme donc l'effort climat  $\Lambda_t = \Lambda_{eq}$  en point de PIB. En utilisant l'équation (3) d'accumulation du capital, on en déduit qu'en réalité la consommation par unité de travail efficace  $c_t = c_{eq}$  est nécessairement constante à l'état stationnaire.

Cela nous donne d'après l'équation d'Euler, l'égalité suivante :

$$(1 + \rho)(1 + n)(1 + \gamma)^\tau = 1 + r_{eq}^g = 1 + f'(k_{eq})(1 - \Lambda_{eq}) - \delta$$

Soit en développant la fonction  $f'$  :

$$k_{eq} = \left( \frac{\alpha(1 - \Lambda_{eq})}{(1 + \rho)(1 + n)(1 + \gamma)^\tau - (1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Analysons maintenant l'équilibre stationnaire concernant les émissions de gaz à effet de serre, l'objectif étant de maintenir les émissions  $E_t$  constantes au niveau du puits carbone. Ceci implique que l'intensité carbone  $\sigma_t$  décroît au même rythme que la production  $Y_t$ , soit  $g$ .

Nous avons donc deux cas. Dans notre scénario central où  $\theta = 1$ , on en déduit d'après l'équation (2) une valeur d'équilibre pour l'effort climat :

$$\Lambda_{eq} = \frac{g}{\varepsilon(1 + g)}$$

On obtient alors pour le cas français une valeur d'environ 1 % d'effort climat, c'est-à-dire une valeur significativement plus basse que l'effort climat qu'il faudrait faire chaque année à partir d'aujourd'hui pour atteindre la neutralité carbone en 2050, qui s'élève à environ 4.5 % du PIB. Néanmoins, pour réduire la concentration de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère, le GIEC invite les États à passer par une période durable d'émissions nettes négatives après l'atteinte de la neutralité carbone, avant de revenir à l'état stationnaire. Nous traduisons cette recommandation par le maintien d'un effort climat à 4.5 % après 2050, c'est-à-dire égale à sa valeur optimale le long de la trajectoire de transition. On en déduit que  $\Lambda_{eq} = 4.5 \%$  et donc la valeur correspondante de  $k_{eq}$ , ce qui nous fixe la condition terminale.

Lorsque  $\theta > 1$ , les exigences de décarbonation sont plus importantes et la relation entre effort climat et décroissance de l'intensité carbone est non linéaire d'après l'équation (2). Il faudrait donc augmenter en permanence l'effort climat  $\Lambda_t$  à partir de l'atteinte de la neutralité carbone pour maintenir un taux de décroissance

## Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité : les enseignements d'une application à la France

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

de l'intensité constant égale au taux de croissance de l'économie. A long terme, il faudra donc consacrer l'intégralité de la production en dépense climat, ce qui n'est pas possible. Autrement dit si  $\theta > 1$ , toute trajectoire impliquant une croissance du PIB n'est pas soutenable à long terme.

- Concernant les conditions initiales, nous fixons une valeur du capital initial  $K_0$  correspondant à sa valeur le long d'un état stationnaire où le taux d'épargne initial  $s_0$  est assimilé à celui de la règle d'or de Ramsey (sans effort climat), c'est-à-dire :

$$k_0 = \left( \frac{s_0}{(1+n)(1+\gamma) + \delta - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

L'objectif est en effet de construire, à partir de l'état initial, un compte central qui se concentre les effets liés à la stratégie de décarbonation. C'est le cas ici puisque l'état initial est un état stable n'impliquant pas de variation de la stratégie d'épargne en l'absence de considération climatique.

### *Méthode de la bisection*

Nous utilisons une méthode dite de la bisection pour calculer une allocation optimale et une séquence de multiplicateurs de Lagrange associés. Nous utilisons cette méthode alternativement pour trouver une valeur optimale de  $c_0$  et de  $\Lambda_0$ .

Pour  $c_0$ , la méthode est la suivante :

Les conditions de premier ordre pour le problème du planificateur, soit les équations (3), (5) et (6), forment un système de relations de récurrence avec deux conditions limites :

$$\begin{aligned} k_0 &\text{ est donné comme condition initiale} \\ k_{T+1} = k_{eq} &\text{ est une condition terminale également donnée} \end{aligned}$$

Nous n'avons en revanche pas de condition initiale pour le multiplicateur de Lagrange  $\mu_0$ . Si c'était le cas, résoudre le problème aurait été simple. Étant donné  $\mu_0$  et  $k_0$ , on peut calculer  $c_0$  grâce à l'équation (5), puis  $k_1$  grâce à l'équation (3) et enfin  $\mu_1$  grâce à l'équation (6). Nous pouvons ensuite itérer et calculer les éléments restants de  $\vec{c}, \vec{k}, \vec{\mu}$ . Mais nous n'avons pas de conditions initiales pour  $\mu_0$ .

Une simple modification, appelée *shooting algorithm*, permet d'avancer. Il s'agit d'un cas particulier de l'algorithme *guess and verify* qui fonctionne de la manière suivante :

- On teste une valeur pour le multiplicateur de Lagrange initial  $\mu_0$
- On applique l'algorithme simple décrit ci-dessus
- On en déduit la valeur conséquente pour  $k_{T+1}$  et l'on vérifie si l'on obtient la valeur recherchée  $k_{eq}$
- Si c'est le cas, le problème est résolu.
- Si  $k_{T+1} > k_{eq}$ , on recommence avec une valeur de  $\mu_0$  plus faible
- Si  $k_{T+1} < k_{eq}$ , on recommence avec une valeur de  $\mu_0$  plus élevée

L'algorithme converge et donne la bonne valeur de  $\mu_0$ . En réalité, on peut tester directement les valeurs de  $c_0$  plutôt que  $\mu_0$ , car les deux sont en bijection (l'une est fonction directe de l'autre et inversement).

Un cas particulier de cet algorithme est la méthode de la bisection. Puisque l'on connaît les bornes de notre consommation initiale (comprise nécessairement entre 0 et la production initiale), on peut appliquer la méthode ci-dessus en ajustant selon le signe de  $k_{T+1} - k_{eq}$  la borne inférieure ou la borne supérieure, de manière à réduire de moitié à chaque itération la longueur du segment où  $c_0$  doit se trouver.

Étant donné que dans notre cas de modèle climatique, nous avons à déterminer les valeurs initiales à la fois de  $c_0$  et de  $\Lambda_0$ , il est possible d'utiliser alternativement la méthode la bisection pour ces deux valeurs et ainsi converger progressivement vers les deux valeurs optimales.

La résolution du modèle, et en particulier à l'aide de cette méthode de la bisection, est mise en œuvre dans le cadre d'un programme Python.

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :**  
**les enseignements d'une application à la France**  
 Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

---

**Annexe en ligne C3 – Richesse, dette climatique et soutenabilité, des notions étroitement liées**

---

Pour établir le lien entre épargne nette ajustée, richesse inclusive, et soutenabilité<sup>2</sup>, Arrow *et al.* (2012) définissent une trajectoire de développement économique soutenable comme une trajectoire où le bien-être ne baisse pas. Plus formellement, on peut définir le bien-être intertemporel à la date  $t$  comme :

$$V(t) = \int_t^{+\infty} u(C_s) e^{-\rho(s-t)} ds$$

où  $C_t$  est la consommation et  $u(C_t)$  est le flux de bien-être associé.

Ainsi, une trajectoire soutenable est une trajectoire où  $dV(t)/dt$  est toujours positif. Une des hypothèses clés de Arrow *et al.* est que  $V(t)$  ne dépend que du stock initial de capital (productif et humain)  $\vec{K}_t$ , et des ressources naturelles  $N_t$ , autrement dit que :

$$V(t) = \int_t^{+\infty} u(C_s) e^{-\rho(s-t)} ds = \hat{V}(\vec{K}_t, N_t, t)$$

Il ne s'agit pas de dire que seuls les stocks d'actifs déterminent les trajectoires économiques, puisqu'elles dépendent aussi des technologies, des valeurs et préférences des individus et des institutions. Mais il s'agit de traiter ces dernières comme exogènes. La condition est vérifiée sur une trajectoire optimale sous contrainte dynamique, mais le cadre se veut plus général.

On a donc :

$$\frac{d\hat{V}(\vec{K}_t, N_t, t)}{dt} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial \vec{K}_t} \dot{\vec{K}}_t + \frac{\partial \hat{V}}{\partial N_t} \dot{N}_t + \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t}$$

Le développement est alors soutenable à un instant  $t$  si cette quantité est positive, soit si :

$$\frac{d\hat{V}(\vec{K}_t, N_t, t)}{dt} = \vec{p}_K \dot{\vec{K}}_t + p_N \dot{N}_t + \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} > 0$$

où  $\vec{p}_K$  et  $p_N$  sont respectivement les prix implicites du capital (physique, humain) et des ressources naturelles, définis formellement comme  $\vec{p}_K = \partial \hat{V} / \partial \vec{K}$ ,  $p_N = \partial \hat{V} / \partial N$ . Le facteur  $\partial \hat{V}(t) / \partial t$  correspond au gain d'utilité lié au seul passage du temps.

On peut montrer que si  $u(C_t) = C_t$  alors  $p_K \dot{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t = EN_t$

La variation de la fonction de bien-être intertemporel, en l'absence de dégradation environnementale, est égale à l'épargne diminuée de la dépréciation du capital, ce qui correspond en comptabilité nationale à l'épargne nette  $EN_t$ .

Par extension, on définit l'épargne nette ajustée  $ENa_t$  comme l'épargne corrigée à la baisse par le coût des dégradations environnementales soit :

$$ENa_t = Y_t - C_t - \delta K_t + p_N \dot{N}_t$$

Une trajectoire soutenable est donc une trajectoire le long de laquelle l'épargne nette ajustée est positive. Dans l'hypothèse où le bien-être n'augmente pas par le seul fait du passage du temps, en dehors de l'accumulation des facteurs, la condition de soutenabilité s'écrit alors :

$$ENa_t = EN_t + p_N \dot{N}_t > 0$$

---

<sup>2</sup> Le cadre posé par Arrow & al. en 2012 s'appuie sur de nombreux développements théoriques sur la question depuis les années 1990, avec les travaux de Pierce & Atkinson (1993), Aronsson et al. (1997), Hamilton et Clemens (1999), Dasgupta (2001), Blanchet et al. (2009), Fleurbaey & Blanchet (2013).

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

Ce cadre d'analyse est également au cœur de la notion de richesse inclusive (*inclusive wealth*) développée à l'initiative du PNUDD dans le cadre du *Sustainable Development Solution Network* (UNU-HDPI, 2012). La richesse inclusive  $\widehat{W}$  est définie comme :

$$\widehat{W} = \vec{p}_K \cdot \vec{K}_t + p_N N_t + p_t t$$

où  $p_t$  est la valeur implicite du temps définie comme  $p_t = \partial \widehat{V}(t) / \partial t$  que l'on prendra égale à 0 pour la suite.

Comme  $d\widehat{W}/dt_{\vec{p}_K, p_N, p_t = cte} = d\widehat{V}(\vec{K}_t, N_t, t)/dt$ , une trajectoire soutenable le long de laquelle le niveau de bien-être est soutenu est une trajectoire où la richesse inclusive, à prix implicites constants, ne décroît jamais. Ce cadre théorique a le mérite de préciser les conditions pour que l'épargne nette ajustée soit un indicateur pertinent de soutenabilité : il faut calculer le prix implicite  $p_N$  et déterminer sa loi d'évolution, qui ne peut se fonder sur la seule observation du passé mais nécessite un travail de projection.

Dans notre cas, la perte de bien-être liée aux émissions de gaz à effet de serre – le coût des dommages – a été définie comme l'effort monétaire d'atténuation  $D_t^v$  nécessaire pour atteindre la neutralité carbone à horizon 2050 – coût de réparation –, sous l'hypothèse d'une répartition équitable de cet effort dans le temps.

Par construction, on a donc :  $d\widehat{V} - p_K \dot{K}_t = -D_t^v$

Par suite, on a :  $p_N \dot{N}_t = -D_t^v = -P_{t_0}^{CO_2} \times E_{t_0}$ , soit encore  $p_N(\bar{E} - E_{t_0}) = -P_{t_0}^{CO_2} \times E_{t_0}$

où  $\bar{E}$  est la capacité du puits carbone terrestre et océanique,  $E_{t_0}$  les émissions à la date de référence où le prix est considéré comme constant et  $P_{t_0}^{CO_2}$  la valeur correspondante du prix social du carbone selon l'approche « ressources ».

Ceci s'écrit aussi  $p_N = P_{ref}^{CO_2} = P_{t_0}^{CO_2} \times 1/(1 - \bar{E}/E_{t_0})$  ce qui signifie que la valeur de l'action climat  $P_{t_0}^{CO_2}$  telle que calculée précédemment peut être utilisée comme fondement du prix implicite des émissions cumulées de CO<sub>2</sub>, modulo le léger rebasage sur les émissions nettes.

Finalement, l'épargne nette ajustée est égale à la différence entre l'épargne nette et la valeur des émissions nettes au prix social du CO<sub>2</sub> de l'année de référence :

$$ENa_t = EN_t - P_{ref}^{CO_2} (E_t - \bar{E})$$

Lors d'une année  $t$ , un effort climat supplémentaire vient donc augmenter l'épargne nette ajustée. En effet, cet effort supplémentaire est compensé par une sous consommation à épargne nette inchangée ; mais cet effort vient diminuer les émissions de GES et donc diminuer le terme d'ajustement de l'épargne nette. Cet exemple montre qu'une formule alternative de l'épargne nette ajustée consiste à soustraire de l'épargne nette la variation de la dette climatique au sens prospectif défini plus haut.

En prenant le capital reproductible comme numéraire, la richesse inclusive peut quant à elle s'écrire :

$$\widehat{W} = K_t + P_{ref}^{CO_2} N_t^{cli}$$

où  $P_{ref}^{CO_2}$  est le prix implicite du carbone d'une année de référence – que nous fixerons dans nos simulations à 2019 – et  $N_t^{cli}$  le « capital » climatique.

Si l'on prend comme référence 1990,  $N_t^{cli} = \sum_{1990}^t (\bar{E} - E_t)$  et alors la richesse élargie  $\widehat{W}$  est tout simplement égale à la différence entre le capital reproductible  $K_t$  et la dette climatique  $\Delta D_t^{1990}$  telle que nous l'avons définie précédemment au sens rétrospectif.

**Références des Annexes en ligne**

**Aronsson, T. & Johansson, L. (1997).** *Welfare Measurement, Sustainability and Green Growth Accounting*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Ltd.

**Arrow, K. J., Dasgupta, P., Goulder, L., Mumford, K. & Oleson, K. (2012).** Sustainability and the Measurement of Wealth. *Environment and Development Economics*, 17, 317–353. <https://doi.org/10.1017/S1355770X12000137>

**Coût social du réchauffement climatique et indicateurs de soutenabilité :  
les enseignements d'une application à la France**

Jean-Marc Germain et Thomas Lellouch  
*Annexes en ligne / Online Appendices*

**Blanchet, D., Le Cacheux, J., & Marcus, V. (2009).** Adjusted net savings and other approaches to sustainability: Some theoretical background. Insee, *Document de travail* G2009/10.  
<http://www.epsilon.insee.fr/jspui/bitstream/1/5751/1/g2009-10.pdf>

**Dasgupta, P. (2001).** *Human Well-Being and the Natural Environment*. Oxford: Oxford University Press.

**Dasgupta, P., Maler, K. & Barrett, S. (1999).** Intergenerational Equity, Social Discount Rates and Global Warming. *In: Discounting and Intergenerational Equity*, ed. by Portney, P. & Weyant, J., chap. 7, Resources for the Future, Washington DC.

**Fleurbaey, M. & Blanchet, D. (2013).** *Beyond GDP. Measuring Welfare and Assessing Sustainability*. Oxford: Oxford University Press.

**Hamilton, K. & Clemens, M. (1999).** Genuine Saving Rate in Developing Countries. *World Bank Economic Review*, 13(2), 333–56. <https://www.jstor.org/stable/pdf/3990101.pdf>

**Pearce, D. W. & Atkinson, G. D. (1993).** Capital Theory and Measurement of Sustainable Development: An Indicator of Weak Sustainability. *Ecological Economics*, 8(2), 103–108.  
[https://doi.org/10.1016/0921-8009\(93\)90039-9](https://doi.org/10.1016/0921-8009(93)90039-9)

**UNU-IHDP (2012).** *Inclusive Wealth Report 2012: Measuring progress toward sustainability*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://digitallibrary.un.org/record/784798?ln=fr>