

ROYAUME DU MAROC



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

INSTITUT NATIONAL D'ANALYSE DE LA CONJONCTURE

**Séminaire sur l'extraction de la tendance-cycle**  
**18-20 octobre 2010, Rabat**

## **FILTRAGE DU TREND CYCLE : QUELQUES SOLUTIONS AUX PROBLEMES RENCONTRES**

### **Sommaire**

*Introduction*

*1. Estimation du trend cycle et moyennes mobiles de Henderson*

*2. Filtrage en présence des points atypiques*

*3. Stabilisation des estimations et apport des prévisions*

*4. Filtre HP modifié*

*Conclusion*

**Par Amal MANSOURI**

AOUT 2010

## **INTRODUCTION**

L'économie marocaine se trouve, à l'instar des autres économies, de plus en plus exposée à des chocs externes, du fait, notamment, de l'instabilité sans cesse grandissante de la conjoncture internationale. Des besoins croissants d'identification des fluctuations profondes de l'activité économique se sont, ainsi, manifestés, obligeant les centres spécialisés en analyse conjoncturelle nationale, notamment l'INAC, à développer leurs travaux en matière de décomposition des séries chronologiques. Ainsi, ont été adoptées, au niveau de l'Institut, des méthodes de filtrage comme le lissage par les moyennes mobiles ou l'estimation directe d'une tendance déterministe ; le cycle étant défini comme écart à la tendance. La mise en pratique de ces approches a été, néanmoins, confrontée à des problèmes pratiques, liés, notamment, au caractère volatil de certaines séries et à l'instabilité des estimations en fin de période. La présence des points atypiques modifiant, parfois, le profil des composantes cycliques des séries constitue, également, un problème inhérent à l'exercice de filtrage. Certes, la datation de ces points est fondée sur des procédés théoriques, mais l'identification de leur typologie et la signification de leurs effets peuvent différer selon les méthodes de désaisonnalisation, rendant compte de certaines différences au niveau des estimations des composantes cycliques et tendancielle.

Cette note relate quelques approches adoptées pour pallier aux difficultés rencontrées au cours du processus de filtrage, opéré sur des séries marocaines. La première approche porte sur l'utilisation de filtres plus longs comme ceux de Henderson, reconnus pour leur faculté de lissage, afin d'estimer le trend cycle de certaines séries problématiques. La deuxième met en exergue le traitement des points atypiques au cours de l'exercice de l'extraction du cycle conjoncturel. Cet exercice devrait être mené sur les composantes trend-cycle des séries au lieu de la CVS, afin de stabiliser les estimations en fin de période. Enfin, les deux dernières parties présentent l'apport du prolongement de la cvs par des prévisions économiques, en premier lieu, et purement autorégressifs, en second lieu, afin de limiter les révisions qui caractérisent les composantes cycliques de certaines séries.

### **1. ESTIMATION DU TREND CYCLE ET MOYENNES MOBILES DE HENDERSON**

Les moyennes mobiles font partie des premières approches utilisées pour estimer le trend-cycle d'une série chronologique. Ces outils ont connu, depuis le début du siècle précédent, des avancées majeures, portant, essentiellement, sur l'identification des coefficients adéquats, qui permettent de mieux estimer la composante tendancielle des séries. Ainsi ont été développées les moyennes mobiles de SPENCER, d'HENDERSON, de MUSGRAVE, Etc.

L'application particulièrement flexible des moyennes mobiles et la facilité de leur construction ont été à la base de leur utilisation dans les logiciels de désaisonnalisation. C'est ainsi qu'au niveau de la méthode X12 ARIMA, la détermination du trend-cycle repose essentiellement sur l'application des

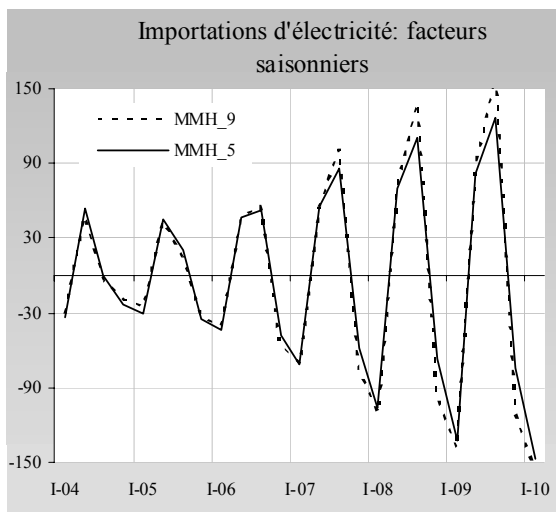
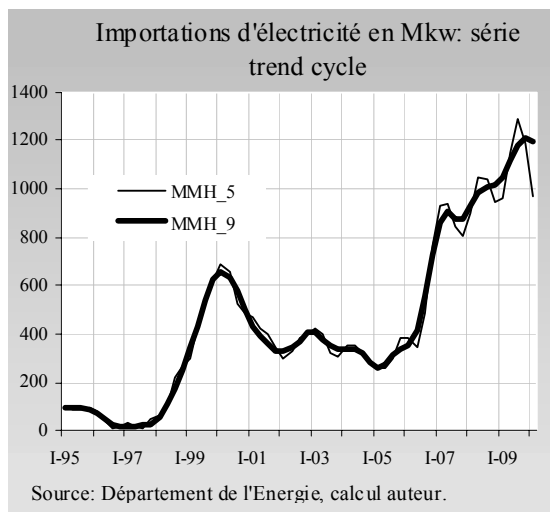
moyennes mobiles de Henderson. Ces dernières, utilisées surtout pour leur capacité élevée de lissage, permettent de conserver les tendances de forme polynomiale de degré inférieur à 3, tout en réduisant le bruit. L'ordre ou la longueur de ce type de moyennes mobiles dépend de la nature de la série traitée. Le ratio  $\bar{I}/\bar{T}$  est généralement utilisé pour choisir cet ordre (5, 7, 9 ou 11 termes) : une forte présence de l'irrégulier ( $\bar{I}/\bar{T} \gg 1$ ) suggère souvent des filtres Henderson plus longs.

La détermination de  $\bar{I}/\bar{T}$ , au niveau de X12 ARIMA, s'effectue au terme du processus itératif suivant :

- Application d'une moyenne mobile symétrique d'ordre 8 sur la série brute, ce qui permet d'annuler la saisonnalité d'ordre trimestrielle, de réduire de 25% l'irrégulier et de générer une première estimation du trend  $\hat{T}$  ;
- Calcul des composantes  $(\hat{S} + \hat{I}) = Y - \hat{T}$  : cas d'un modèle additif ;
- Estimation des facteurs saisonniers provisoires : application d'une moyenne mobile symétrique saisonnière d'ordre 5 sur la série  $\hat{S} + \hat{I}$  ;
- La série de l'irrégulier est déduite par différence  $\hat{I} = Y - \hat{S} + \hat{T}$

Comme la première estimation de l'irrégulier n'intègre pas toutes les fluctuations atypiques et qu'une partie non-négligeable reste affectée au trend, le ratio  $\bar{I}/\bar{T}$ , permettant de définir l'ordre de la moyenne mobile de Henderson dans le programme de désaisonnalisation X12, se trouve sous évalué. Ainsi, des filtres d'Henderson plus courts sont souvent appliqués à des séries chahutées, fournissant des estimations plus volatiles de la composante trend-cycle de la série. Cette dernière subit des révisions importantes, à la suite de l'introduction de nouvelles observations

Pour mettre en évidence les problèmes d'analyse de la composante trend cycle des données chahutées, obtenue à l'aide d'un filtre de moyenne mobile très court, nous présentons les résultats de décomposition de la série des importations d'électricité sur une période de 16 années, soit 64 observations trimestrielles. Il en ressort que la tendance, estimée à partir d'une moyenne mobile de Henderson de 5 termes (retenue par les programmes de désaisonnalisation), comporte toujours des fluctuations erratiques qui semblent, également, intégrer un phénomène de saisonnalité résiduelle. Nous étudions, ensuite, l'impact de l'application des filtres de Henderson plus longs (7, 9 et 11 termes) sur le trend cycle et l'irrégulier de la série. Les résultats obtenus montrent que les estimations se confondent globalement à l'exception des extrémités, où l'apport de la moyenne mobile de 9 termes est notable. La série de l'irrégulier est plus homoscedastique et les facteurs saisonniers plus importants notamment ceux du troisième trimestre. L'application d'une MMH de 9 termes a permis de lisser le trend cycle et a induit une révision des estimations de la saisonnalité et de l'irrégulier.



## 2. FILTRAGE EN PRESENCE DES POINTS ATYPIQUES

La forte présence des points atypiques rend souvent le filtrage des données difficile et mal fondé. L'analyse statistique de ce type de points, bien qu'assez ancienne, a été mise récemment en exergue, grâce aux développements majeurs qu'ont connu les méthodes de désaisonnalisation les plus réputées telles que le X-12-ARIMA (X12) et le TRAMO-SEATS (TS). Les nouvelles versions de ces méthodes intègrent, à travers leurs programmes automatiques, un pré-ajustement des séries chronologiques des effets des points atypiques, s'inspirant surtout de la méthode de Chen et Liu (1993), pour TS et Otto et Bell(1990), au niveau de X12.

Pour corriger les effets des points aberrants, les méthodes de désaisonnalisation retiennent une formulation RegARIMA de type :

$$Y(t) = \sum w_i \lambda_i(B) d_i(t) + \sum \alpha_i \text{cal}_i(t) + \sum \beta_i \text{reg}_i(t) + X(t)$$

Avec :

$d_i(t)$  est une variable binaire qui indique la position du  $i$ ème point atypique,  $\lambda_i(t)$  est un polynôme de l'opérateur retard  $B$ ,  $\text{cal}$  : variables retraçant les effets du calendrier,  $\text{reg}$  : variable d'intervention (effets particuliers dont l'utilisateur pourrait tester la signification) et  $X(t)$  un processus SARIMA.

Généralement, les points aberrants qui peuvent caractériser une série chronologique sont :

- Les additifs outliers (AO) : ce sont les points aberrants qui affectent seulement une observation à un point donné de la série temporelle et qui n'ont aucun impact sur ses valeurs futures. Ce type de points est modélisé, au niveau de TS, en considérant  $\lambda_i(B) = 1$  et 0 ailleurs ;

- Les level shifts (LS) : ils correspondent à un changement permanent du niveau de la série.  
Dans ce cas :  $\lambda_i(B) = 1 / (1 - B)$ ,

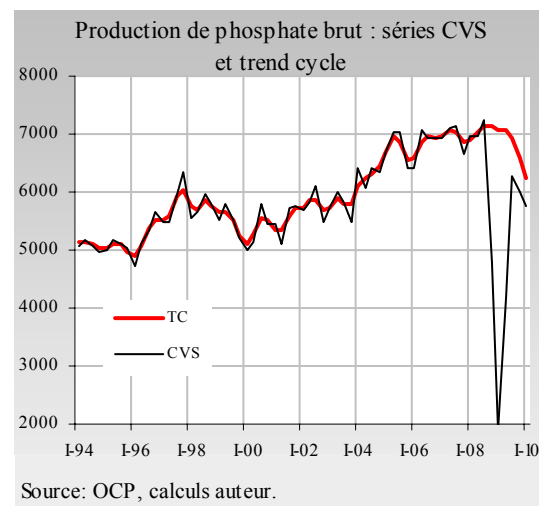
- Les changements temporaires « Temporary Changes TC » qui coïncident avec augmentations ou baisses progressives, suivies d'un retour brusque au niveau initial de la série.

$$\lambda_i(B) = 1 / (1 - 0,7 B).$$

Après identification et estimation, les points atypiques sont généralement retirés de la série brute, avant de procéder à l'ajustement saisonnier. Cet exercice permet, en effet, d'identifier les différents types de saisonnalité et de faciliter les premières estimations du trend cycle. Les points atypiques s'ajoutent au trend cycle et à l'irrégulier, en fin de processus, pour définir la série cvs.

Une fois estimée, la série cvs sert de base pour séparer les composantes structurelles de la série de celles conjoncturelles (cycles). Les techniques permettant d'accomplir cette tâche sont assez variées (filtres spécifiques, moyennes mobiles, Etc.). Les résultats obtenus semblent généralement « raisonnables » lorsque la série cvs ne comporte pas différents types de points atypiques ou affiche un profil peu volatil. Dans le cas échéant, il serait plus judicieux de baser l'exercice de filtrage sur la composante trend-cycle de la série au lieu de la cvs.

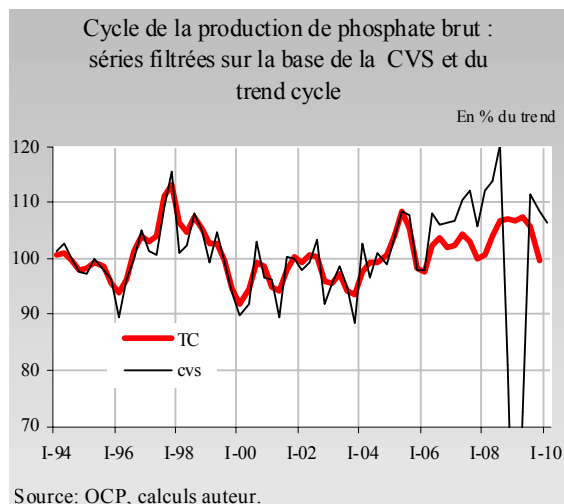
L'utilisation de la série trend cycle pour le filtrage des composantes cycliques se justifie à plusieurs titres, notamment dans le cas du filtre HP. Ce dernier suppose explicitement que la présence des fluctuations irrégulières n'est pas nuisible à l'exercice de décomposition et les affectent totalement à la composante cyclique. Toutefois, pour des données fortement marquées par la présence de l'irrégulier, les estimations du cycle sont souvent instables et sujettes à des révisions. Pour d'autres filtres, il existe bien des traitements pour isoler la



composante irrégulière, effectués pour la plupart au cours du processus de décomposition. Mais, des tests empiriques tendent à prouver que des résultats meilleurs sont obtenus lorsque ces fluctuations sont corrigées en amont du processus. Par ailleurs, il faudrait souligner que le filtrage d'une série cvs, comportant différents types de points atypiques, pourrait engendrer des résultats fallacieux. Les points atypiques seront automatiquement intégrés dans la composante cyclique lors du processus de décomposition de la série cvs. Or, seuls les points de type « changement permanent » peuvent être

affectées à la composante tendancielle de la série. Les points aberrants et les changements transitoires sont généralement assimilés à des fluctuations irrégulières.

Pour montrer les modifications opérées sur la composante cyclique en présence des points atypiques, nous avons utilisé la série de la production du phosphate brut au Maroc. La période d'estimation s'étale sur 15 ans, soit 60 observations trimestrielles. Le graphique ci-joint compare les résultats d'extraction de la composante cyclique de la production du phosphate, via le filtre HP, à partir de la série cvs et celle obtenu sur la base du trend cycle. Les deux séries sont proches, le cycle brut, issu du filtrage de la cvs est plus fluctuant. La correction du changement transitoire, opéré au deuxième trimestre 2009 est importante. L'évolution actuelle de la composante cyclique de la production de phosphate est fortement influencée par cette correction. La différence reflète l'effet de l'élimination du point atypique du deuxième trimestre 2009 au niveau de la série trend cycle (il a été affecté aux fluctuations irrégulières).



### 3. STABILISATION DES ESTIMATIONS ET APPORT DES PREVISIONS

Le filtre Hodrick-Prescott (HP) est l'une des méthodes les plus couramment utilisées pour séparer les composantes structurelles de celles conjoncturelles. Ce filtre possède des propriétés statistiques qui ont facilité son utilisation pour extraire la composante tendancielle des séries. Sa conception théorique repose sur une décomposition standard d'une série chronologique (Y) en deux éléments : une tendance de long terme (T), non stationnaire, et des fluctuations de court terme (C), stationnaires. L'estimation de la tendance résulte du calcul d'optimisation suivant :

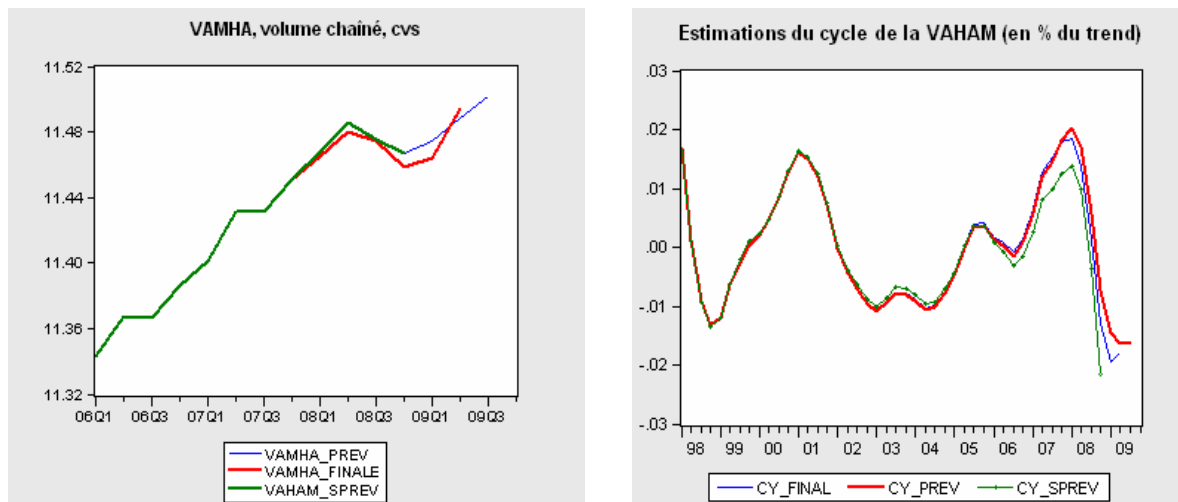
$$\text{Min} \sum (Y_t - T_t)^2 + \lambda \sum (\Delta T_{t+1} - \Delta T_t)^2 \quad (1)$$

Où  $\lambda$  est le paramètre de lissage. S'il n'y avait que le premier terme, la solution du programme serait  $T_t = Y_t$  à tous les temps t et il n'y aurait pas de composante cyclique. Mais le second terme impose une pénalité sur les changements de pente de la tendance. Globalement, un  $\lambda$  faible affecte négativement l'estimation de la composante cyclique et génère une tendance volatile. A l'opposé, un  $\lambda$  très élevé conduit à surestimer la composante cyclique.

Bien que Hodrick et Prescott aient suggéré, dans leur article original (1997), des valeurs standards pour  $\lambda$  (1600 pour les séries trimestrielles), Marcet et Ravn (2003) avaient montré que la formulation

(1) peut être réécrite sous forme d'un programme mathématique sous contraintes, permettant de déterminer de façon endogène la valeur du paramètre  $\lambda$ . Une des interprétations de ce nouveau programme fait correspondre le filtre HP à une moyenne mobile symétrique de longueur infinie. Pour filtrer un point spécifique de l'échantillon, des poids différents sont affectées aux observations qui l'entourent. Ces poids dépendant, d'une part, de la taille de l'échantillon, et d'autre part, de la valeur du paramètre de lissage  $\lambda$ . Le choix de ce dernier conditionnera le nombre des observations qu'il faut rajouter à la fin de l'échantillon initial pour éviter le problème des effets de bord, mais également, certaines propriétés de la tendance, en particulier son degré de lissage.

Globalement, l'application des filtres symétriques, tels que le HP, pose des problèmes pour les extrémités des séries filtrées, rendant les estimations en fin de période plus instables. Pour contourner ce problème, des propositions de prolongement de la série cvs de k points ont été formulées. Le filtre HP serait appliqué, par la suite, à la série prolongée pour obtenir  $(T^*_1, \dots, T^*_{T+k})$ , mais seules les  $T^*_1, \dots, T^*_T$ , seront retenues pour besoin de l'étude. Le prolongement de la série pourrait être effectué à l'aide de modèles économétriques. L'idée de base est d'utiliser des prévisions, dont les erreurs sont minimales (ne dépassent pas 5%), afin de stabiliser les estimations du HP en fin de période.



A titre d'exemple, nous examinons les estimations de la composante cyclique de la valeur ajoutée marchande hors agriculture (VAHAM), sur la période s'étalant du premier trimestre 1998 au quatrième 2009. Le premier graphique illustre les résultats de filtrage, en prolongeant la série au moyen d'une agrégation des estimations univariées des valeurs ajoutées des principales branches d'activités du secteur marchand (prev) et ceux effectuées sans incorporation des prévisions (sprev). A noter que les estimations sectorielles ont été obtenues par des modèles Reg ARIMA, dont la qualité statistique a été jugée satisfaisante. Le cycle obtenu en prolongeant de 2 périodes le logarithme du PIB en volume s'écarte peu de celui extrait sur la même série non prolongée à l'exception des dernières observations, où la différence est notable. Les révisions opérées sur la VAHAM prolongée sont minimales.

#### 4. FILTRE HP MODIFIÉ : UNE AUTRE INTERPRÉTATION DU FILTRE STANDARD

Le filtre HP élimine ou réduit les fluctuations de long terme de la série, tout en préservant ceux ayant approximativement des fréquences du court terme. Il en résulte un cycle conjoncturel, qui a servi de base pour un très grand nombre d'analyses économiques. Ce filtre, bien que largement utilisé, a fait l'objet de plusieurs critiques, notamment en raison de l'instabilité de ses estimations en fin de période. Une des méthodes recommandées pour réduire cette instabilité est de prolonger la série avec des prévisions, obtenues sur la base des modèles ARIMA simples sans informations auxiliaires. Toutefois, comme a été souligné par Apel et al. (1996), les erreurs de prévisions, liées à ce type de modèles, et le fait que les résultats sont souvent sensibles au nombre de périodes prévues semblent délimiter l'apport de cette technique. Des études ont été, ainsi, menées, afin de reformuler le programme d'optimisation proposé par Hodrick et Prescott et réduire l'ampleur des révisions opérées sur ses estimations en fin de période.

La réécriture du filtre HP, proposé par Marcet et Ravn, a favorisé plusieurs interprétations de son programme. Le filtre HP pourrait être, ainsi, considéré comme un cas particulier de la famille de filtres Butterworth (Gomes, 1999). Il pourrait aussi s'apparenter à une formulation de type modèle à composantes inobservables (Harvey et Jaeger, 1993 et King et Rebelo, 1993). Kaiser et Maravall (2001) ont également démontré que le filtre de Wiener-Kolmogorov pourrait être proposé comme solution au programme d'optimisation défini par le filtre HP. Plus encore, ils ont indiqué que si la série cvs s'apparente à un modèle ARIMA, quatre périodes de prévisions sont suffisantes pour reproduire exactement l'effet du filtre symétrique infini (une autre interprétation du filtre HP).

Les résultats obtenus par Kaiser et Maravall sont basés sur une interprétation de type modèle à composantes inobservables du filtre HP, définie par :

$$\begin{aligned} X_t &= T_t + C_t \\ T_t &= T_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iidN}(0, \sigma_\varepsilon) \\ \phi(B)C_t &= \theta(B) a_t \end{aligned} \quad (2)$$

Ce type de décomposition suppose que les chocs affectant la tendance et le cycle sont indépendants. Ainsi  $\sigma_{\varepsilon a} = 0$ . En retenant l'interprétation du filtre HP, proposée par King et Rebelo, la solution du modèle (2) est donnée par  $\nabla^2 T_t = \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{iidN}(0, \sigma_\varepsilon)$ . Le cycle est un BB(0,  $\sigma_c$ ) et le paramètre de lissage  $\lambda$  est égal au ratio  $\sigma_c / \sigma_{\varepsilon..}$ . Cette formulation permet de modéliser la série X sous forme d'un processus moyenne mobile intégré IMA (2,2), tel que :

$$\nabla^2 X_t = \varepsilon_t + \nabla^2 C_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) \psi_t = \theta(B) \psi_t, \quad \psi_t \sim \text{iidN}(0, \sigma_\psi) \quad (3)$$



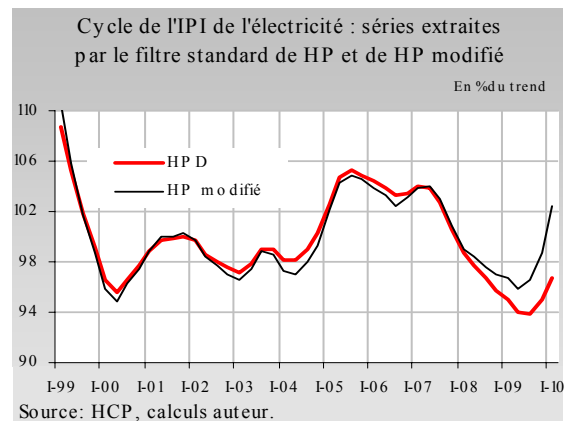
Où  $\nabla = 1 - B$  est la différentiation standard ( $\nabla x = x_t - x_{t-1}$ ),  $B$ : opérateur retard et  $F$ : opérateur avance, tel que  $F = B^{-1}$ .

Pour des séries trimestrielles et un paramètre de lissage  $\lambda$  fixé à 1600, les coefficients du polynôme  $\theta(B)$  sont définis par :  $\theta_{HP}(B) = 1 - 1,77709B + 0,79944B^2$  et  $\sigma_\psi = 2001,4$

Plus généralement, le programme du filtre HP « modifié », proposé par Maravall et Kaiser, (équations 2 et 3) retient l'estimateur du trend, généré par le filtre Wiener-Kolmogorov<sup>1</sup>, et défini par:

$$\hat{T}_t = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\psi} \frac{1}{\theta_{HP}(B)\theta_{HP}(F)} X_t$$

Une application de cette méthode sur des indicateurs sectoriels, tel que l'indice de production d'électricité a été testée. Après avoir subi les premiers traitements, via la méthode X12 ARIMA, la composante trend cycle de la série a été retenue comme base pour l'exercice de filtrage à l'aide du filtre standard de HP et de celui modifié. Les résultats montrent globalement que les deux courbes sont confondues, jusqu'au premier trimestre 2008, où l'écart est devenu important. Le cycle obtenu par le filtre HP modifié semble plus stationnaire. Son taux de révision moyen est moindre. Historiquement, son dernier point de retournement a été atteint au deuxième trimestre 2009, en avance de deux trimestres par rapport à celui détecté par le filtre HP standard.



## CONCLUSION

Cette note avait pour objectif de décrire succinctement des solutions à certaines difficultés rencontrées au cours de l'exercice de filtrage des séries marocaines. Il s'agit, notamment, des problèmes posés par l'instabilité des estimations en fin de période et le traitement des points atypiques. Les travaux menés actuellement par l'Institut portent sur l'exploitation de nouvelles méthodes de décomposition. Celles-ci reposent sur une autre conception de filtrage, où l'estimation de la tendance rend compte de toutes les composantes permanentes de la série (tendance stochastique) et que le cycle résulte de l'impact transitoire des chocs que subit l'activité.

<sup>1</sup> Pour plus de détail technique, se référer à « measuring business cycles in economic time series », R. Kaiser & Agustin Maravall, 2001.

L'ensemble de ces éléments pourrait constituer une plateforme de discussion et d'échange avec l'expertise européenne, représentée par MM. Dominique LADIRAY et Gian Luigi MAZZI, avec la participation des équipes algériennes et tunisiennes, spécialisées dans le domaine du traitement des séries chronologiques, à l'occasion du séminaire qui se déroulera dans les locaux du HCP-MAROC, du 18 au 20 octobre 2010.

---

## Bibliographie

---

**K.ATTAL**, « La désaisonnalisation : des origines jusqu'au nouveaux logiciels X12ARIMA et TRAMO-SEATS », insee-méthodes, n°69-70-71.

**C. BOUTHEVILLAIN**, « PIB potentiel et écart du PIB : quelques évaluations pour la France », Juillet 2002.

**P.-A. BRUCHEZ**, « A modification of the HP Filter : aiming at reducing the end-point Bias », August 2003

**D.LADIRAY & M.GRUN REHOMME**, « Moyennes mobiles centrées et non-centrées. Construction et comparaison », revue statistique appliquée, 1994.

**R. KAISER et A. MARAVALL**, « measuring business cycles in economic time series », R. Kaiser & Agustin Maravall, 2001.

**R. KAISER et A. MARAVALL**,« A complete model-based interpretation of the Hodrick-Prescott filter: Spuriousness Reconsidered », march 2002.

**K M. McDonald-Johnson and C. Hood**, «Outlier Selection for RegARIMA Models», U.S. Census Bureau, ESMPD Time Series Methods Staff, Washington, DC 20233-6250

**Holly B. SHULMAN**, « Trend estimation with concurrent seasonal adjustment », U.S. Census Bureau, ESMPD Time Series Methods Staff, Washington, D.C.20233, 1984.