

Chapitre 2 : Le modèle théorique

2.1 Le vieillissement d'une pyramide des âges

À partir des effectifs par sexe et âge de la population d'un territoire donné à une date fixée, la population s'en déduit exactement un an plus tard en tenant compte de quatre éléments :

- le vieillissement d'une année d'âge des individus
- l'ajout de la nouvelle génération issue des naissances de l'année
- la déduction des décès survenus au cours de l'année
- l'ajout des arrivées et la soustraction des départs, autrement dit l'ajout des migrations nettes

La nouvelle pyramide ainsi calculée, le processus peut être reconduit pour l'année suivante, jusqu'à l'horizon souhaité.

Pour mettre en œuvre ce mécanisme, il faut disposer de la pyramide des âges de la population à un moment donné et de méthodes de calcul des décès, migrations nettes et naissances pour chaque année de la projection. Parmi d'autres possibilités, les flux annuels peuvent être reliés à la population présente sur le territoire selon un taux propre à chaque flux :

- quotients de mortalité par sexe et âge pour les décès
- quotients de migrations nettes par sexe et âge pour le solde migratoire
- quotients de fécondité selon l'âge de la mère pour les naissances

Le modèle de projection Omphale est construit sur cette technique de projection. À la différence d'autres modèles de projections démographiques, il ne retrace pas explicitement l'origine et la destination des migrations.

2.2 Données et convention de notations

Les données mises en œuvre par le modèle sont des effectifs et des taux. Les effectifs se distinguent en stocks, quand il s'agit d'une population à un instant donné et en flux quand il s'agit d'un nombre d'événements au cours d'une période donnée. Cette distinction se retrouve sur les taux. On utilisera, parfois improprement, le terme de quotient lorsque l'on considère un flux rapporté à la population concernée et le terme de taux quand il s'agit de caractériser une population à un instant fixé. Le tableau 1 rassemble les notations utilisées pour les principales données utilisées par Omphale.

Tableau 1 : Convention de notation des variables

Les stocks	
P	Population totale au 1 ^{er} janvier
PRP	Population totale à la date du recensement
A	Population active
L	Population de personnes de référence des ménages ou nombre de résidences principales
E	Population d'élèves ou étudiants
Les flux	
D	Décès
M	Migrations nettes (ou solde migratoire)
N	Naissances
Les taux relatifs aux stocks à un moment donné	
TA	Taux d'activité
TL	Taux de personnes de référence des ménages
TE	Taux de scolarisation
T ₁ ,T ₂	Taux de masculinité/féminité des naissances
Les quotients relatifs aux flux pour une période	
QF	Quotient de fécondité
QM	Quotient de migrations nettes (ou solde migratoire)
QD	Quotient de décès (ou quotient de mortalité)
QS	Quotient de survie

À l'exception des taux de masculinité et féminité des naissances, ces données sont relatives à une zone et à un moment ou une période. Elles sont en outre déclinées par sexe et âge. Ceci entraîne une quadruple indexation des variables.

Dans les formules, les quatre indices seront dans l'ordre suivant :

1. La zone à projeter indiquée **z**, un point représente l'ensemble de la métropole
2. l'année indiquée **a** pour une année ou [A1,A2[pour un intervalle de temps du 1/1/A1 au 1/1/A2 (non compris)
3. Le sexe, indicé **s**, peut prendre les valeurs 1 pour les hommes, 2 pour les femmes
4. L'indice **i** est réservé à l'âge. Pour éviter les confusions, l'indice **j** sera utilisé quand il s'agit de l'âge de la mère pour le calcul des naissances et des quotients de fécondité.

Pour en terminer avec les conventions d'écriture, l'opérateur \div sera utilisé pour la division euclidienne (quotient entier).

2.3 La notion d'âge dans Omphale

Omphale projette la population de premier janvier en premier janvier (sous-entendu à 0 heure). À cette date, l'ensemble des personnes nées la même année, une génération, a le même âge. Ainsi au premier janvier 2000, tous les enfants nés en 1998 ont 1 an : tous ont fêté leur premier anniversaire et aucun n'a encore fêté le second.

Cet âge est en décalage d'un an par rapport à l'âge utilisé aux recensements. Le recensement ayant lieu en cours d'année, les enfants nés l'année précédente sont tous classés à 1 an, âge qu'ils atteindront au cours de l'année du recensement. Les enfants nés entre le premier janvier et la date du recensement sont classés à l'âge 0.

Par convention, dans Omphale, les naissances au cours d'une année sont assimilées à une population fictive d'âge -1 au premier janvier de l'année :

$$N_{z,a,s} = P_{z,a,s,-1}$$

Les décès et migrations nettes de ces enfants entre la date de naissance et la fin de l'année sont aussi affectés à l'âge -1. Cette convention permet d'avoir une équation de l'évolution de la population d'une année sur l'autre identique pour i allant de -1 à 97:

Equation 0 : Evolution de la population en fonction des effectifs

$$P_{z,a+1,s,i+1} = P_{z,a,s,i} - D_{z,a,s,i} + M_{z,a,s,i}$$

Cette convention permettra aussi d'uniformiser les équations de calcul des quotients de survie et de migrations nettes. Mais cette uniformisation assurée à la base de la pyramide des âges souffrira de quelques exceptions au sommet de la pyramide. Les recensements antérieurs à 1999 ne fournissent pas la population par âge détaillé au delà de 99 ans. Cette limite impose de grouper, sous la modalité 99, la population de 99 ans et la population ayant dépassé cet âge. Ce regroupement des générations introduit des traitements spécifiques selon les calculs effectués. Dans le cas de la population, le traitement consiste à ajouter les populations obtenues pour $i=98$ et $i=99$:

$$P_{z,a+1,s,99} = (P_{z,a,s,99} - D_{z,a,s,99} + M_{z,a,s,99}) + (P_{z,a,s,98} - D_{z,a,s,98} + M_{z,a,s,98})$$

Dans les résultats d'Omphale, la population d'une zone est obtenue en totalisant les âges 0 à 99 ans en excluant l'âge -1 qui correspond à une population fictive.

2.4 Définition des quotients

2.4.1 Le quotient de mortalité ou quotient de décès

La définition du quotient de mortalité (QD) est la plus intuitive : c'est la probabilité pour un individu de décéder au cours de l'année. Parmi une population P en début d'année soumise toute l'année au quotient de mortalité QD, le nombre de décès au cours de l'année sera par définition :

$$D^* = P.QD$$

2.4.2 Le quotient de fécondité

De la même façon, le quotient de fécondité est défini comme la probabilité pour une femme d'avoir un enfant au cours de l'année. Le quotient ne tient pas compte du sexe de l'enfant, la répartition entre garçons et filles est faite arbitrairement par application d'un taux de masculinité des naissances (T_1). Le nombre d'enfants mis au monde au cours de l'année par une population de femmes F ayant un quotient de fécondité QF est :

$$N^* = P.QF$$

dont $N^*.T_1$ garçons et $N^*.T_2$ filles ($T_2 = 1 - T_1$)

2.4.3 Le quotient de migrations nettes

Le quotient de migrations nettes (QM) est la différence entre deux quotients :

- le quotient d'immigration (QI), propension d'une population à s'accroître par immigration
- le quotient d'émigration (QE), propension d'une population à se réduire par émigration du territoire.

Le solde des arrivées et départs au cours d'une année d'une population P ayant des quotients d'immigration et d'émigration QI et QE est :

$$M^* = P.QI - P.QE = P(QI - QE) = P.QM$$

Les sources mises en œuvre par Omphale ne permettent pas de déterminer indépendamment le quotient d'immigration et le quotient d'émigration. Seule la différence de ceux-ci, le quotient de migrations nettes, peut être calculée.

Il faut noter que les quotients d'immigration et d'émigration considérés ici sont uniquement fonction de la population du territoire. Ils ne tiennent compte ni de son environnement ni de sa capacité d'accueil. Le tarissement d'une source d'immigration, par exemple, ne peut être simulé dans le modèle que de manière indirecte. Il faut alors évaluer, hors modèle, leur effet sur les quotients de migrations nettes pour les traduire ainsi en hypothèse acceptable par Omphale.

2.4.4 Limites de la mesure des quotients

Les quotients sont définis dans l'absolu car ils ne sont pas directement mesurables. Par exemple, la propension à émigrer de la population est la proportion dans la population au premier janvier des personnes qui quitteront le territoire en cours d'année. Or en fin d'année, seuls les émigrants réels peuvent être connus, les personnes potentiellement émigrantes mais décédées avant de partir sont ignorées. D'autre part, chaque quotient est relatif à un territoire donné, les migrants qui résident une partie de l'année dans un autre territoire ne vivent pas toute l'année dans les mêmes conditions de fécondité ou mortalité.

Plus généralement, le modèle repose uniquement sur les données relatives à la zone à projeter, l'environnement ne joue que par son influence sur ces données. En projection, sauf à construire des hypothèses adaptées, le modèle est aveugle aux modifications possibles de l'environnement de chaque zone. Mais ce qui peut être considéré comme un défaut du modèle en est aussi une qualité essentielle : Omphale peut projeter toute zone pour laquelle on dispose d'un minimum d'informations.

2.5 Equations fondamentales

L'utilisation de ces quotients pour déterminer les nombres de naissances, décès et migrants qui affectent réellement la population d'un territoire impose de faire des hypothèses sur la saisonnalité des événements démographiques et les conditions de mortalité et fécondité externes au territoire.

La première hypothèse est que les décès, les naissances et les migrations (immigration et émigration) sont uniformément répartis tout au long de l'année.

La seconde hypothèse est que les conditions de mortalité et de fécondité des émigrants, immigrants et des non-migrants sont égales.

Ces deux hypothèses reviennent à considérer que les migrants, nouveau-nés et défunts ont résidé six mois en moyenne dans le territoire observé. Cette simplification permet d'exprimer les flux et les populations en fonction des quotients. L'approximation induite par ces hypothèses ne nuit guère à la qualité des résultats (cf. annexes).

Equation 1 - Décès dans le territoire par sexe et âge

$$D_{z,a,s,i} = P_{z,a,s,i} \cdot QD_{z,a,s,i} \cdot (1 + QM_{z,a,s,i} / 2)$$

Equation 2 - Migrations nettes dans le territoire par sexe et âge

$$M_{z,a,s,i} = P_{z,a,s,i} \cdot QM_{z,a,s,i} \cdot (1 - QD_{z,a,s,i} / 2)$$

Equation 3 - Naissances par âge de la mère et sexe de l'enfant

$$N_{z,a,s,j} = T_s \cdot QF_{z,a,2,j} \cdot P_{z,a,2,j} \cdot (1 - QD_{z,a,2,j} / 2)(1 + QM_{z,a,2,j} / 2)$$

Equation 4 - Nombre total des naissances

Par convention, ce nombre est assimilé à la population d'âge -1

$$P_{z,a,s,-1} = \sum_{j=15}^{j=49} N_{z,a,s,j}$$

Equation 5 - Evolution de la population d'une année sur l'autre

Equation obtenue en remplaçant dans l'équation 0 les événements par leur expression en fonction des quotients.

$$P_{z,a+1,s,i+1} = P_{z,a,s,i} \cdot (1 - QD_{z,a,s,i})(1 + QM_{z,a,s,i})$$