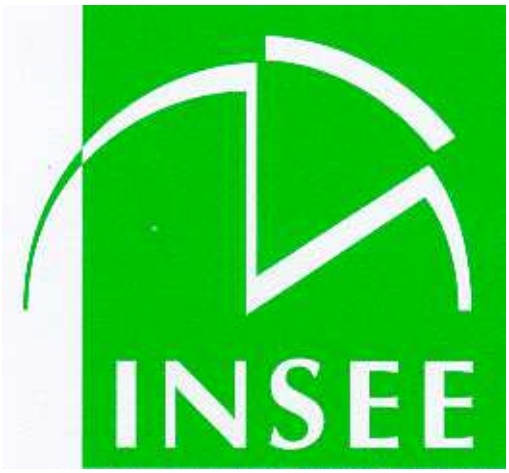
Direction des Statistiques Démographiques et Sociales

N° F1305

LES DONNÉES DE CAISSE : VERS DES INDICES DE PRIX À LA CONSOMMATION À UTILITÉ CONSTANTE

Patrick SILLARD

Document de Travail



Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES
Série des Documents de Travail
de la
DIRECTION DES STATISTIQUES DÉMOGRAPHIQUES ET SOCIALES

N°F1305

LES DONNÉES DE CAISSES : VERS DES INDICES DE PRIX À LA CONSOMMATION À UTILITÉ CONSTANTE

PATRICK SILLARD

(DIVISION PRIX A LA CONSOMMATION)

Document de travail

Juin 2013

Ces documents de travail ne reflètent pas la position de l'INSEE et n'engagent que leurs auteurs.
Working-papers do not reflect the position of INSEE but only their authors'views.

Les données de caisses : vers des indices de prix à la consommation à utilité constante [1]

Patrick Sillard[2]

Résumé

L'Insee s'est engagé dans l'examen de données de caisses issues de la collecte des prix et des quantités élémentaires des produits passant en caisse quotidiennement dans les points de vente de la grande distribution. Chaque produit est repéré dans ces données par son code-barre. Ces informations permettent d'envisager des traitements massifs de données dans le but d'élaborer des indices de prix à la consommation. La disponibilité, nouvelle pour pour les statistiques de prix à la consommation, de quantités vendues permet d'envisager de s'écarter de l'approche traditionnelle des calculs d'indices qui ne fait pas appel à des informations de quantités vendues, hormis à un niveau relativement agrégé. Cet article examine la possibilité de se rapprocher des fondements microéconomiques des indices de prix à la consommation en réalisant, avec les données de caisses, des calculs d'indices qui tiennent compte de l'éventuelle sensibilité des consommateurs aux prix relatifs des produits. Ces fondements font appel au concept d'indice à utilité constante qui est revisité dans cet article. On étudie en particulier le rôle de l'observation des fonctions de demande dans la réalisation de tels indices et applique ces concepts au cas des ventes de yaourts dans un supermarché de la grande distribution sur trois ans. On montre en particulier que la bonne application des concepts d'indice à utilité constante permet d'élaborer des indices qui tiennent naturellement compte des produits en promotion sans avoir nécessairement à procéder à l'appariement de ces produits avec les produits équivalents ne faisant pas l'objet de promotion. En dehors de ce constat, les écarts avec les indices classiquement utilisés restent limités ou tiennent, lorsque les préférences du consommateur ne sont pas homothétiques, à des phénomènes – secondaires pour les indices de prix – d'évolution tendancielle du chiffre d'affaires du point de vente.

JEL Codes : E31 ; C83 ; D11 ; D12.
Key-words : Price indices, CPI, scanner data.

[1]Ce travail a bénéficié des commentaires de Jérôme Accardo, Jean-Pierre Berthier, Axelle Chauvet-Peyrard, Sébastien Faivre, Dominique Guédès, Fabrice Lenglart, Jean-Louis Lhéritier, Gaëtan Varlet, Lionel Viglino, Lionel Wilner ainsi que des remarques des participants aux Journées de méthodologie statistique 2012, du séminaire de la DSDS (juin 2012) et du colloque ONU-BIT des experts sur les prix à la consommation (Genève, 2012).

[2]Insee – Division des prix à la consommation

Introduction

Les indices de prix à la consommation sont désormais des indicateurs économiques normalisés au niveau international. En particulier, les méthodologies appliquées par les différents pays européens sont comparables. Les indices de prix à la consommation sont dits à "qualité constante". En d'autres termes, l'indice vise à refléter les évolutions de prix à services rendus et qualité constants. Du point de vue économique, la notion sous-jacente est celle d'indice de prix à utilité constante (voir par exemple (Magnien & Pougeard 2000, Viglino 2000)). Ceci étant, hormis sous des hypothèses restrictives de comportement du consommateur, les indices de prix à la consommation, tels qu'ils sont construits aujourd'hui, ne sont pas des indices à utilité constante. En effet, raisonner à utilité constante suppose d'observer la substitution qui s'opère entre les consommations de biens au cours des états successifs de l'économie. Autrement dit, on ne peut envisager de construire des indices à utilité constante dans le cas général, que si l'on observe les fonctions de demande.

Sur le plan microéconomique, la question de la substituabilité de biens se pose pour des biens de même nature, vendus dans des lieux d'extension géographique restreinte [1], marchés pour lesquels la substitution de produits est réalisable concrètement pour un consommateur. La question de savoir de combien s'écartent les indices à qualité constante des indices à utilité constante ne se pose donc véritablement qu'au niveau du calcul des micro-indices, c'est-à-dire de l'opération qui consiste à passer de prix de produits à un indice élémentaire se rapportant à un ensemble de produits de même nature. Dans la mécanique de calcul d'indice, l'indice élémentaire est ensuite agrégé par agrégation de Laspeyres pour fournir un indice d'ensemble. La présente étude porte donc uniquement sur le calcul de micro-indices de prix.

En pratique, l'observation conjointe des prix de vente et quantités repose sur la disponibilité de données de caisses. Dans le cadre du projet d'intégration des données de caisses dans l'indice des prix à la consommation actuellement conduit par l'Insee [2], plusieurs enseignes de la grande distribution lui ont donné accès à trois années d'observations hebdomadaires de prix et quantités vendues sur environ 1000 de leurs points de vente et ce, pour 10 familles de produits.

La question du biais des indices de prix a été au centre des débats de la commission Boskin à la fin des années 1990 (Boskin, Dulberger, Gordon, Griliches & W.Jorgenson 1998, Moulton & Stewart 1999, Diewert 1998) aux États-Unis. Ces travaux ont mis en évidence l'écart entre les indices de prix classiques et les indices de prix à utilité constante ("*Cost of Living Index*" en anglais). Ils montrent aussi que lorsque les fonctions de demandes sont observées, la construction d'indices à utilité constante est possible. Plusieurs travaux ont été conduits à partir de cette idée sur les différents biais des indices de prix, notamment les biais liés à l'apparition de nouveau produits ou à leur disparition (Hausman 2003). L'application empirique de ces travaux est restée limitée jusqu'aux travaux portant sur données de caisses. Les travaux empiriques réalisés sur de telles données jusqu'à présent portent essentiellement sur l'étude de phénomènes microéconomiques de substitution (Feenstra & Shapiro 2003, Hausman & Leibtag 2007, Hausman, Pakes & Rosston 1997). Ce texte examine plus spécifiquement l'application de ces idées aux indices de prix.

1. Nous considérons, dans cet article, que la substituabilité ne concerne que les biens vendus dans les points de vente classiques à l'exclusion des articles vendus sur internet. Pour l'alimentaire, cette hypothèse semble raisonnable en première approximation.

2. Voir http://www.cnis.fr/cms/Accueil/themes/Entreprises_et_strategies_de_marche?fiche=OPE-INSEE-IPC-DONNEES-CAISSE-13-W

Après une première partie visant à préciser le cadre économique dans lequel s'inscrivent les indices de prix à la consommation, les données des caisses utilisées sont présentées. Puis la stratégie d'estimation des paramètres des fonctions de demandes calculées à partir de ces données est présentée. Enfin, différents indices de prix à utilité constante sont calculés et comparés aux indices de prix classiques.

1 Le cadre économique des indices de prix à la consommation

Les indices de prix sont des indicateurs économiques destinés à rendre compte de l'évolution générale des prix. Si les produits échangés étaient les mêmes d'une période à l'autre et s'ils étaient échangés dans les mêmes proportions, il suffirait d'observer les prix à chaque période et l'évolution moyenne des prix serait simplement la moyenne des évolutions observées pour chaque produit, individuellement pondérées par le poids de chacun de ces produits dans la dépense de première période. Ce serait aussi l'évolution des dépenses que doivent réaliser les consommateurs pour maintenir leur volume de consommation de biens d'une période à l'autre. En pratique, les quantités consommées et les produits offerts évoluent : chaque mois, de nouveau produits apparaissent et d'autres disparaissent, de sorte qu'il n'est pas possible de fonder un indicateur destiné à rendre compte de l'évolution générale des prix sur le suivi d'un ensemble parfaitement stable de biens. Lorsque les produits évoluent, le consommateur lui-même s'adapte : il achète des produits nouveaux qui, le cas échéant, se substituent à des produits qu'il ne consomme plus (voir par exemple (Saglio 1994)). Si on suppose que le consommateur est rationnel, c'est-à-dire qu'il forge sa consommation sur des choix cohérents dans le temps, alors l'utilité que lui procure la consommation de nouveau produits est vraisemblablement différente de celle que lui procurait la consommation des produits antérieurement consommés. Afin de rendre compte de cette évolution pour le consommateur, les indices de prix à la consommation s'appuient sur une démarche empirique qui vise à reproduire dans l'enquête, le choix que pourrait être amené à faire un consommateur rationnel qui a l'habitude d'acheter un produit donné dans un magasin et qui ne le retrouve pas. Ce consommateur se trouve donc confronté, si la consommation d'un tel produit lui est toujours utile, à la nécessité d'acheter un produit de substitution dont les caractéristiques diffèrent du produit qu'il achetait auparavant. Le prix du nouveau produit est généralement différent du prix de l'ancien, donc la dépense du consommateur évolue. Mais si les caractéristiques des produits diffèrent, on peut penser que le consommateur en tire un surcroît (éventuellement négatif) d'utilité pour lequel il peut être disposé à payer. Si le consommateur est disposé à payer pour une différence de caractéristiques de produits, alors la différence de dépense qu'il consent entre les deux périodes ne traduit pas seulement une différence de prix ; elle traduit aussi une différence de volume de consommation. En pratique, lors d'un remplacement, la valorisation de la différence de caractéristiques des produits s'opère soit de manière explicite en s'appuyant sur un modèle hédonique, estimé par ailleurs, de dépendance des prix aux caractéristiques des produits, soit de manière implicite en faisant l'hypothèse que, toutes choses égales par ailleurs, si le produit antérieur avait été conservé, son prix aurait suivi une évolution parallèle à celle des prix des produits de même nature vendus dans des magasins proches.

On comprend dés lors que le partage volume/prix est un sujet fondamental des indices de prix. L'approche empirique qui prévaut dans la plupart des indices modernes repose toutefois sur un certain nombre d'hypothèses qu'il est possible de réexaminer dans un cadre théorique de comportement microéconomique du consommateur (Deaton & Muelbauer 1980).

1.1 Modélisation économique

On postulera avec la théorie microéconomique Varian (1975), que le consommateur est capable d'émettre des préférences qui le conduisent, étant donné le budget dont il dispose, à classer les paniers de biens que son budget lui permet d'acheter et d'en choisir un qu'il préfère à tout autre. Le consommateur réalise des choix qui peuvent se modéliser à l'aide d'une fonction d'utilité, opérant dans l'espace des paniers de biens et à valeur réelle. Cette fonction classe les paniers de biens conformément aux préférences du consommateur. Le consommateur choisit le panier de biens qui minimise sa dépense sous contrainte de niveau d'utilité ou, de manière duale, maximise son utilité sous contrainte budgétaire [3].

Si on note $\mathbf{p}$ le vecteur des prix et $\mathbf{s}$ celui des quantités, u l'utilité du consommateur représentatif (la fonction est supposée indépendante du temps), le consommateur décide de consommer une quantité $\mathbf{x}$ sur le fondement du programme suivant (dont $\mathbf{x}$ est l'argument) :

$$e(\mathbf{p}, U) = \left| \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{p}.\mathbf{s} \\ \text{s.c. } u(\mathbf{s}) = U \end{array} \right. \tag{1}$$

Ainsi construite, $e(\mathbf{p}, U)$ est la fonction de dépense : c'est la dépense minimale que doit consentir le consommateur pour atteindre le niveau d'utilité U conditionnellement aux prix $\mathbf{p}$. De manière duale, l'utilité maximale atteinte pour une dépense R conditionnellement aux prix $\mathbf{p}$ est appelée utilité indirecte. On la note $v(\mathbf{p}, R)$.

On considère à présent deux instants : un instant de référence t et un instant t' ($t' > t$), entre lesquels on souhaite construire un indice traduisant l'évolution des prix. Les observables sont les prix aux deux instants et la dépense initiale, notée R. A l'instant t, le consommateur-optimisateur atteint un niveau d'utilité $v(\mathbf{p}_t, R)$. Pour atteindre le même niveau d'utilité à l'instant t', il devra consentir une dépense $e(\mathbf{p}_{t'}, v(\mathbf{p}_t, R))$. Par construction, l'indice des prix à utilité constante est simplement :

$$I_{UC}^{t',t}(R) = \frac{e(\mathbf{p}_{t'}, v(\mathbf{p}_t, R))}{R} \tag{2}$$

Il traduit l'évolution, entre t et t', du budget que le consommateur doit dépenser pour atteindre en t' le niveau d'utilité qu'il atteignait en t avec une dépense R. Il est utile à ce stade de définir la fonction correspondant au numérateur de l'expression précédente ($\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont deux vecteur de prix quelconques ; R est un budget quelconque) :

$$\mu(\mathbf{p}; \mathbf{q}, R) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{q}, R)) \tag{3}$$

Cette fonction est appelée utilité indirecte en équivalent monétaire. Elle correspond à la dépense que le consommateur doit consentir avec le vecteur de prix $\mathbf{p}$ pour atteindre le niveau d'utilité qu'il atteint avec le vecteur de prix $\mathbf{q}$ pour une dépense de R.

A l'aide de la fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire, l'indice à utilité constante s'écrit :

$$I_{UC}^{t',t}(R) = \frac{\mu(\mathbf{p}_{t'}; \mathbf{p}_t, R)}{R} \tag{4}$$

1.2 L'indice à utilité constante pour des fonctions d'utilité usuelles

Il est intéressant d'examiner la forme prise par l'indice des prix (4) lorsqu'une fonction d'utilité est explicitement choisie pour modéliser les choix du consommateur. Ces éléments sont en outre utilisés

3. Il est souvent utile de faire l'hypothèse, peu restrictive, que l'utilité est une fonction concave, au moins localement, ce qui assure l'unicité du panier de biens préféré. Nous faisons cette hypothèse dans la suite du texte.

plus loin dans ce texte. Nous examinons ici le cas de trois fonctions classiques : l'utilité de Cobb-Douglas, l'utilité de Léontief et l'utilité CES[4]. Chacune de ces fonctions d'utilité est fondée sur des présupposés concernant le comportement du consommateur, notamment en ce qui concerne le caractère substituable des produits composant le panier de biens consommés. La fonction CES a été introduite par (Arrow, Chenery, Minhas & Solow 1961). La principale caractéristique de l'utilité CES est de reposer sur l'hypothèse que les biens du panier de consommation sont substituables avec une élasticité de substitution identique quel que soit le couple de biens (i, j) considéré : si x_i est la demande de bien i et p_i le prix du même bien, l'élasticité de substitution $d\ln(x_i/x_j)/d\ln(p_i/p_j)$ vaut $-\varepsilon$ pour la fonction d'utilité CES présentée à la table 1. Cette fonction est concave lorsque $\varepsilon > 0$.

Les utilités de Cobb-Douglas et Léontief sont des cas limites de l'utilité CES. La première correspond au cas où $\varepsilon \to 1$ et la seconde, au cas où $\varepsilon \to 0$. Les expressions des utilités, demandes et indices sont données à la table 1.

TABLE 1 – Demande et indice des prix pour les utilités CES, de Cobb-Douglas et de Léontief

	CES	Cobb-Douglas	Léontief
utilité : $u(\mathbf{s}) =$	$\left(\sum_k \alpha_k s_k^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}\right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}$	$s_1^{\alpha_1} \times \ldots \times s_n^{\alpha_n}$	$\min\{\alpha_1 s_1, \ldots, \alpha_n s_n\}$
$d\ln(x_i/x_j)/d\ln(p_i/p_j) =$	$-\varepsilon$	-1	0
demande : $x_i(\mathbf{p}, R) =$	$\frac{R}{p_i} \frac{\alpha_i \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{1-\varepsilon}}{\sum_k \alpha_k \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^{1-\varepsilon}}$	$\alpha_i \frac{R}{p_i}$	$R/\left(\alpha_i \sum_k \frac{p_k}{\alpha_k}\right)$
indice : $I^{t',t} =$	$\frac{\left(\sum_k \alpha_k \left(\frac{p_k^{t'}}{\alpha_k}\right)^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}}{\left(\sum_j \alpha_j \left(\frac{p_j^{t}}{\alpha_j}\right)^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}}$	$\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^{t'}}{p_i^t}\right)^{\alpha_i}$	$\left(\sum_i \frac{p_i^{t'}}{\alpha_i}\right) / \left(\sum_j \frac{p_j^t}{\alpha_j}\right)$

Notes : Le consommateur consomme un ensemble de n biens notés $\{1, \ldots, n\}$ en quantités $\mathbf{s}$ et aux prix $\mathbf{p}$; la fonction d'utilité CES est définie (concave) pour $\varepsilon > 0$; les coefficients α_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont des pondérations strictement positives traduisant les préférences du consommateur ; R est le budget (exogène) que le consommateur consacre à l'achat de l'ensemble des biens $\{1, \ldots, n\}$; p_i^t est le prix du bien i à la période t ; $I^{t',t}$ est l'indice des prix associé au panier de biens considéré de la période t' par rapport à la période t correspondant à la définition (2). La ligne $d\ln(x_i/x_j)/d\ln(p_i/p_j)$ correspond à l'élasticité de substitution entre les biens du panier, étant donnée la fonction d'utilité concernée. En l'espèce, toutes les utilitées examinées dans ce tableau sont à élasticité constante, donc celle-ci ne dépend ni du couple de produits considérés, ne de la dépense. Formellement, l'indice dépend du budget consacré à l'achat des biens en période t. Mais ici, les utilités étant homothétiques, le budget de la période t se simplifie dans l'expression des indices. Les coefficients $(\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sont des paramètres des fonctions d'utilité et de demande. Ils sont positifs et de somme unitaire.

On note que la fonction d'utilité de Léontief conduit à un indice de type Laspeyres (ou Paasche), tandis que la fonction d'utilité de Cobb-Douglas conduit à un indice sous forme de moyenne géométrique de rapports de prix (indice de Laspeyres géométrique, également connu sous le nom d'indice de Jevons lorsque les pondérations sont unitaires). Ces deux formules d'indices sont utilisées dans l'indice des prix à la consommation français pour le calcul des micro-indices.

Le choix de la fonction d'utilité a évidemment des conséquences importantes sur la trajectoire de l'indice à utilité constante. En particulier, les hypothèses de substitution des produits du panier ont une

4. Pour *constant elasticity of substitution*.

incidence directe sur la réponse de l'indice à des variations de prix relatifs. En effet, lorsque l'élasticité de substitution est élevée, si le prix relatif d'un bien augmente, sa consommation diminue au profit de la consommation des autres biens, de sorte que l'accroissement de la dépense d'ensemble est atténué par rapport à l'accroissement qui résulterait de la simple augmentation de la dépense pour le bien considéré, les quantités étant fixées par ailleurs. Ce dernier cas correspond d'ailleurs à ce qui se produit lorsque l'élasticité est nulle. L'utilité sous-jacente est alors celle de Léontief et l'indice est celui de Laspeyres (voir table 1) : un accroissement du prix relatif d'un bien se traduit par un accroissement de l'indice proportionnel au taux de croissance du prix, pondéré par le poids du bien considéré dans la dépense totale. Une élasticité de substitution, en valeur absolue, supérieure à 0 caractérise un comportement de substitution de la part du consommateur. En cas de variation des prix relatifs de certains biens, le consommateur qui substitue, c'est-à-dire dont l'utilité est caracérisée par une élasticité de substitution non nulle, va avoir tendance à accroître sa consommation de biens dont le prix relatif a diminué et inversement diminuer sa consommation de biens dont les prix relatifs ont augmenté. Ce faisant, en substituant, le consommateur cherche à réduire son exposition à la hausse des prix relatifs et à accroître le bénéficie qu'il tire des baisses de prix relatifs. En résumé, plus la substituabilité des produits est élevée, plus les hausses de prix relatifs vont être atténuées et plus les baisses vont être accentuées.

1.3 Le panier de biens consommés

Les indices à utilité constante reposent sur un modèle de comportement d'un consommateur représentatif. Ce consommateur opère des choix sur un panier de biens disponibles pour sa consommation. La définition même de ces biens est une disposition propre du modèle qu'il convient de discuter, notamment au regard de la dynamique d'entrées/sorties des articles : dans les commerces, des articles disparaissent de la vente (ou ne sont tout simplement pas achetés par les consommateurs) et d'autres apparaissent quotidiennement.

Faire l'hypothèse qu'entre deux périodes, les préférences du consommateur restent identiques, revient à formuler, techniquement, l'hypothèse que la fonction d'utilité conserve la même structure et qu'entre ces deux périodes, les quantités consommées ne s'ajustent que sous l'action de l'évolution des prix. Entre deux périodes rapprochées dans le temps, cette hypothèse paraît finalement assez raisonnable.

En revanche, le panier de biens sur lequel s'expriment ces choix, c'est-à-dire techniquement les composantes du vecteur sur lequel opère l'utilité, peut se concevoir d'au moins deux manières différentes : la première est celle adoptée dans le cadre des indices de prix traditionnels, comme l'IPC français (voir aussi encadré « L'IPC français et les formules de calcul utilisées en pratique »), où le panier de biens se rapporte, non pas à des articles physiques biens précis, mais plutôt à des classes de produits. Dans cette modélisation de la consommation, la classe de produits considérée, correspondant dans la fonction d'utilité à une composante particulière du vecteur-panier, coïncide avec un article dans un magasin à un instant donné. Si cet article disparaît, la classe de produit coïncide avec un article différent de l'article précédent, mais qui remplit, aux yeux du consommateur, un usage similaire. Cette opération qui consiste à choisir un autre article pour représenter la classe de produit est appelé *remplacement*. La différence de prix entre l'article remplaçant et le remplacé fait l'objet d'un traitement destiné à neutraliser, dans la différence de prix, la partie liée à des différences de caractéristiques entre produits qui se tradui-

raient, toutes choses égales par ailleurs, par une différence d'utilité pour le consommateur. Dans cette approche, la notion de produit suivi s'apparente donc à celle d'un usage qui doit être satisfait à chaque période de temps.

L'approche alternative consiste à traiter chaque article, consommé ou pas, comme un bien constitutif du panier sur lequel le consommateur représentatif forge ses choix. Dans ce modèle, chaque composante du vecteur sur lequel opère l'utilité correspond à un article physique unique.

L'IPC français et les formules de calcul utilisées en pratique Le panier de biens suivis dans l'indice des prix à la consommation (IPC) s'appuie sur une notion d'usage à satisfaire à chaque période de temps, chaque usage étant assuré par un bien ou service vendu dans un point de vente et un jour du mois particuliers. Afin de définir des classes d'usages, l'Insee s'appuie sur une nomenclature internationale d'usages de consommation (la COICOP pour « Classification Of Individual COnsumption by Purpose ») déclinée, dans le cas français, à un niveau très fin, appelé variété. Au niveau des variétés, la consommation est couverte par environ un millier de types d'usage différents. Par exemple, le croissant est une des variétés suivies dans l'IPC français. Le croisement des variétés et des points de vente fréquentés par les enquêteurs de l'Insee définit le panier d'usages suivis dans l'IPC. Pour une variété donnée et pour des raisons d'échantillonnage statistique, un seul bien ou service est suivi dans un point de vente donné. Le passage de prix à des indices élémentaires est réalisé au niveau du croisement de la variété et de l'agglomération dans laquelle les relevés sont réalisés. Deux formules sont utilisées pour calculer les indices élémentaires : une formule de Laspeyres (utilité de Léontief) pour les variétés correspondant à des produits homogènes (comme le croissant par exemple) ; une formule de Laspeyres géométrique (utilité de Cobb-Douglas) pour les variétés correspondant à des produits hétérogènes (comme les machines à laver par exemple). Au-delà de l'agglomération, le calcul d'indice est réalisé, à partir des indices élémentaires, par agrégation de Laspeyres. Économiquement, cela revient à inscrire la substituabilité des produits d'une variété donnée à l'échelle des agglomérations et des points de vente et à formuler les hypothèses suivantes :

- il n'y a pas de substitution au-delà de l'échelle de l'agglomération ;
- des substitutions peuvent exister au sein des points de vente sans que l'on ait besoin de formuler l'hypothèse retenue en la matière puisque le plan de sondage conduit à n'observer qu'un seul représentant de la variété par point de vente ;
- pour les variétés homogènes, il n'y a pas de substitutions entre points de vente ;
- pour les variétés hétérogènes, des substitutions s'opèrent aussi entre points de vente avec une élasticité de substitution unitaire.

De manière schématique, ces hypothèses reviennent à postuler que le consommateur fait jouer la concurrence au sein d'un point de vente entre produits d'une variété. Entre points de vente, il fait jouer la concurrence pour les biens et services hétérogènes, tandis que pour les biens et services homogènes, il se contente, une fois dans le point de vente, de ce qui y est vendu, sans faire jouer la concurrence entre points de vente.

Les formules de calcul des indices élémentaires et les approches par variétés de biens et services et échelons géographiques sont, pour l'essentiel, normalisées entre les différents pays européens.

Dans cette étude, nous adoptons l'approche alternative précédente qui s'appuie un concept de produit plus proche de la réalité vécue par le consommateur. En contrepartie, elle exige de bien caler les hypothèses de comportement du consommateur en lien avec les substitutions effectivement observées dans les magasins. Nous verrons que ceci est envisageable avec les données de caisses qui apportent des éléments tangibles sur ces questions.

Naturellement, ce modèle alternatif, pour rendre compte de la disparition (ou simplement de la consommation nulle) ou de l'apparition d'article, doit autoriser la description d'une consommation nulle de certains biens. En effet, lors d'une période donnée, la consommation de biens qui vont apparaître dans le futur est nulle, de même que celle de biens qui ont disparu.

Considérons, pour illustrer ce point, les modèles de comportement dérivés d'une utilité CES. Tous n'autorisent pas la description d'une dynamique d'entrées/sorties telle qu'évoquée ci-dessus. Par exemple, dans un modèle de comportement à utilité de Léontief, aucun bien ne devrait apparaître puisque, dans ce modèle, le consommateur est supposé consommer tous les biens en quantité non nulle (voir la fonction de demande de Léontief – table 1). Sur un plan technique, cette impossibilité à décrire une consommation nulle de certains biens se traduit notamment par la nullité de l'utilité lorsque la quantité consommée d'un bien du panier est nulle. La possibilité de substituer un bien à un autre est donc une condition nécessaire pour qu'un modèle de comportement CES autorise, dans sa description de la consommation, la nullité des quantités consommées pour certains biens à certaines périodes.

Toutes les fonctions de demandes étudiées à la table 1 s'annulent (avec la condition $\varepsilon > 0$ pour la demande CES) lorsque le prix d'un bien est infini. Néanmoins, les utilités Cobb-Douglas et Léontief dégénèrent et s'annulent lorsque lorsque les quantités d'un bien sont nulles. C'est aussi le cas pour l'utilité CES lorsque $0 < \varepsilon \leqslant 1$. C'est évidemment une situation inacceptable sur le plan de la modélisation économique car alors, l'utilité est invariablement nulle quelles que soient les quantités consommées des autres biens. Dans le cas de l'utilité CES, la condition supplémentaire $\varepsilon > 1$ permet de lever la difficulté : si $\varepsilon > 1$, lorsque le prix p_i^t du bien i à la période t est infini, la demande est nulle et l'utilité ne dégénère pas. Dans ce cas, le bien ne contribue plus à l'indice, hormis lors d'une transition entre deux périodes, l'une où il est consommé et l'autre où il ne l'est pas. Dans un tel modèle, l'apparition à la vente d'un nouveau bien se traduit par un accroissement de l'utilité du consommateur et une baisse des prix. A l'inverse, la disparition se traduit par une hausse des prix.

La possibilité de calculer des indices de prix sur des paniers évoluant dans le temps a été envisagée et traitée sur un plan théorique par Balk (1999). Elle a été appliquée avec succès par Mesler (2006) avec une utilité CES, l'une des principale difficultés résidant dans l'estimation de ε qui peut, le cas échéant, donner lieu à des valeurs inférieures à 1 et donc ne permettant pas d'appliquer la méthode.

1.4 De l'observation des fonctions de demande aux indices à utilité constante

Sans faire d'hypothèses économiques autre que le comportement de maximisation de l'utilité du consommateur, il est possible de passer de l'observation de fonctions de demandes empiriques (en l'occurrence pour un consommateur représentatif qui achèterait ses produits dans un point de vente donné au cours de périodes successives) d'un ensemble de produits élémentaires plus ou moins substituables du point de vue du consommateur, à une fonction d'utilité. Le cadre théorique appliqué ici est celui de l'intégrabilité des fonctions de demande (Hurwicz & Uzawa 1971).

Le passage de fonctions de demande à des fonctions d'utilité ou des fonctions d'utilité en équivalent monétaire a été examiné en détail par Varian (1975, 1982b) et Hausman (1981a, 1981b).

En premier lieu, toutes les fonctions de demande ne dérivent pas d'une utilité. On montre (Hurwicz & Uzawa 1971, Varian 1975) que pour dériver de l'optimisation d'une utilité sous contrainte budgétaire,

les fonctions de demandes de biens i et j quelconques doivent [5] vérifier la relation de symétrie suivante (appelée condition d'intégrabilité dans la littérature) portant sur les termes de la matrice de Slutsky :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}\ ,\ \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p},R) = \frac{\partial x_j(\mathbf{p},R)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_i(\mathbf{p},R) \tag{5}$$

où x_i et x_j sont les fonctions de demande [6] des biens i et j.

Une fois cette propriété vérifiée, on montre qu'il existe une relation entre la demande conditionnelle aux prix $\mathbf{p}$ à budget R donné, $\mathbf{x}(\mathbf{p},R)$, et l'utilité indirecte en équivalent monétaire. La relation dérive du lemme de Shephard et s'écrit sous la forme d'une équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ ,\ x_i(\mathbf{p},\mu(\mathbf{p};\mathbf{q},R)) = \frac{\partial \mu(\mathbf{p};\mathbf{q},R)}{\partial p_i} \tag{6}$$

Dans ce système d'équations, $\mathbf{q}$ et R sont des paramètres, la fonction μ étant une fonction (inconnue) de $\mathbf{p}$. Si la fonction x_i est observée (i.e. sa dépendance vis-à-vis du vecteur de prix $\mathbf{p}$ et de la dépense R sont établies), alors le système d'équations (6) est un système d'équations différentielles partielles en μ, fonction du vecteur $\mathbf{p}$ et dépendant de paramètres $\mathbf{q}$ et R. A cette équation différentielle s'ajoute une condition limite

$$\mu(\mathbf{q};\mathbf{q},R) = R \tag{7}$$

Moyennant quoi, à l'aide des relations (5), (6) et (7), il est possible de passer de relations (observables) de demande pour un ensemble $\{1,\ldots,n\}$ de produits élémentaires à un indice à utilité constante sur cet ensemble de biens.

En pratique, deux solutions peuvent être envisagées. La première consiste à spécifier une fonction de demande empirique vérifiant les propriétés de symétrie (5), à estimer économétriquement cette fonction, puis, à calculer un indice de prix en résolvant, pour la spécification retenue, le système d'équations différentielles (6). C'est cette méthode que nous appliquons dans cette étude. Une seconde méthode pourrait être envisagée. Elle consiste à travailler sur des formes non paramétriques de fonctions de demande, puis à résoudre numériquement le système d'équations différentielles (6). Cette méthode a été examinée par Varian (1982a) en établissant un parallèle avec la notion de préférences révélées. Toutefois les applications concrètes semblent délicates à mettre en œuvre. Hausman & Newey (1995) ont appliqué des méthodes non paramétriques à l'évaluation des effets d'une variation de prix sur le bien-être.

Revenons à l'approche paramétrique retenue dans cette étude et traitons un exemple à partir de la spécification d'une fonction de demande et son estimation économétrique. Il existe naturellement différentes spécifications possibles de la demande. La spécification log-linéaire est assez souvent utilisée pour caractériser des fonctions de demande pour un type de produit donné. Nous adoptons donc une équation de demande de bien i de la forme suivante [7] :

$$\ln x_i(\mathbf{p},R) = \gamma_i + \zeta_i \ln p_i + \beta_i \ln R$$

Cette spécification est log-linéaire. L'application des conditions d'intégrabilité (5) conduit à (M_{ij} est le membre de gauche de l'équation 5) :

$$M_{ij} = \frac{\beta_i}{R} x_i(\mathbf{p},R) x_j(\mathbf{p},R) \ \text{ et } \ M_{ij} = M_{ji} \Leftrightarrow \beta_i \equiv \beta$$

5. condition nécessaire et suffisante

6. Ces fonctions dépendent du couple de grandeurs $\mathbf{p}$ et R. Elles sont appelées, dans la littérature, demandes Marshaliennes. Pour l'ensemble des biens, le vecteur de fonctions de demande est noté $\mathbf{x}(\mathbf{p},R)$.

7. On sort donc ici de l'hypothèse d'élasticité constante.

Sous cette réserve, la spécification

$$\ln x_i(\mathbf{p}, R) = \gamma_i + \zeta_i \ln p_i + \beta \ln R \tag{8}$$

vérifie les conditions d'intégrabilité.
La résolution du système (6) est proposée en annexe pour cette fonction de demande. On aboutit finalement à l'utilité indirecte en équivalent monétaire associée à la demande linéaire précédente :

$$\mu(\mathbf{p}; \mathbf{q}, R) = \left\{ (1-\beta) \left[\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} . \frac{p_i^{1+\zeta_i} - q_i^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{9}$$

Il en découle une formule d'indice à utilité constante (traduisant l'évolution des prix entre t et t' où $t' \geqslant t$ et R_t est la dépense du consommateur représentatif à la période t) :

$$I_{LogLin}^{t',t} = \left\{ 1 + (1-\beta) R_t^{\beta-1} \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} . \frac{p_{it'}^{1+\zeta_i} - p_{it}^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{10}$$

A la différence des indices présentés à la table 1, cet indice fait intervenir le budget consacré par le consommateur à l'achat des biens lors de la période de référence. L'utilité sous-jacente n'est donc pas homothétique, ce qui en soi est assez conforme à l'intuition puisqu'il n'y a aucune raison pour qu'une croissance du budget se traduise par une croissance uniforme des quantités consommées. Au contraire, il est assez vraisemblable que, lorsque le budget augmente, la consommation se déplace vers des produits de meilleure qualité, et sur un plan global, vers des biens non alimentaires [8]. On retrouve ce type de résultats dans les travaux empiriques sur les courbes d'Engel (voir par exemple (Clerc & Coudin 2010, Herpin & Verger 2008)).

2 Les données

Le modèle proposé à la section précédente repose sur des hypothèses de comportement rationnel d'un consommateur représentatif. La notion de consommateur représentatif n'est pas évidente. On sait par ailleurs qu'en général, l'agrégation des préférences ne repose pas sur l'optimisation d'une fonction d'utilité collective de sorte qu'il n'est pas certain que le comportement agrégé des consommateurs dérive de l'optimisation d'une fonction d'utilité. Néanmoins, si on souhaite conserver le fondement théorique exposé à la section précédente, on est conduit à s'appuyer sur la notion de consommateur représentatif. En d'autres termes, sur le marché analysé, tout se passe comme si un consommateur unique achète tous les biens consommés sur ce marché, substitue un bien à un autre selon une décision rationnelle découlant de l'optimisation d'une fonction d'utilité et ce consommateur représentatif est *price taker* sur le marché considéré. Naturellement, l'enchaînement de ces hypothèses rend assez peu probable l'existence d'un marché d'ensemble qui fonctionnerait exactement de cette manière. En revanche, on peut imaginer que plus on descend à un niveau microéconomique fin, plus on se rapproche de conditions de fonctionnement proches de celles exposées. Afin de se placer dans un cadre réaliste, nous devons donc travailler sur un marché local où les consommateurs effectuent un choix entre des produits réellement substituables. Nous avons donc choisi de travailler sur le marché des yaourts vendus dans un magasin de la grande distribution. Les données couvrent trois ans sur lesquels on dispose, pour ce magasin,

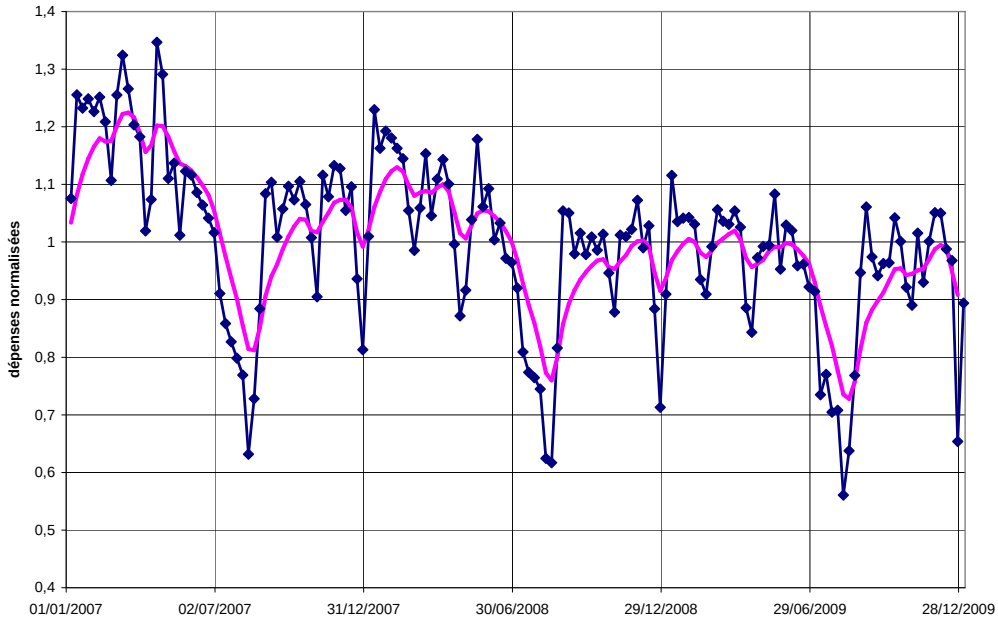
8. Dans cette logique, les biens alimentaires apparaissent comme des biens inférieurs.

des quantités vendues et des prix hebdomadaires de tous les yaourts vendus au moins une fois dans la semaine dans ce point de vente.

Sur un tel marché, les hypothèses de consommateur représentatif sont assez vraisemblables puisque la possibilité de substituer un produit à un autre est réalisable concrètement. Par ailleurs, pour le consommateur qui consomme un yaourt dans ce magasin, il est plus aisé de substituer un yaourt à un autre dans ce magasin plutôt que de se rendre dans un autre magasin pour acheter un produit remplaçant. Ainsi, un modèle agrégé de comportement sur le marché des yaourts vendus dans le magasin étudié, s'il ne résulte pas de l'agrégation des préférences individuelles, constitue néanmoins une représentation plausible du fonctionnement du micro-marché étudié. Par conséquent, un indice à utilité constante fondé sur cette modélisation reflétera certainement très convenablement l'évolution des prix sur ce marché.

Le lot de données étudiées comprend environ 35000 observations réparties sur 157 semaines (de janvier 2007 à décembre 2009). Sur cette période, environ 600 références différentes (codes-barres) de yaourts ont été vendues au moins une fois. Dans cette étude, le code-barres constitue l'élément d'identification du produit. En moyenne, chaque référence est vendue 950 fois sur les trois années d'observation ; la médiane se situe à 300, tandis que les 1^{er} et $9^{ème}$ déciles valent respectivement 30 et 2300.

FIGURE 1 – Chiffre d'affaire associé au marché des yaourts pour le magasin étudié



Note : Les "dépenses normalisées" sont calculées comme le rapport du chiffre d'affaires hebdomadaire et du chiffre d'affaire hebdomadaire moyen observé pour l'ensemble des trois années d'observation. La courbe pleine est la version filtrée du graphe hebdomadaire par un filtre de Butterworth passe-bas (Hamming 1997).

La figure 1 donne le tracé du chiffre d'affaires (normalisé par la moyenne des trois ans) du marché des yaourts pour le magasin considéré au cours des trois années d'étude. Sur la période, le chiffre d'affaires varie pratiquement du simple au double avec des effets saisonniers très marqués, le point haut se situant approximativement au premier semestre de l'année, tandis que le point bas se situe au mois d'août. Il est aussi caractérisé par une légère décroissance tendancielle sur la période.

3 Application

Trois indices ont été calculés sur les bases exposées à la section 1 : un indice de Laspeyres chaîné annuellement, un indice à utilité constante de type CES (formule de la table 1) et un indice fondé sur l'inversion des fonctions de demande (formule 10). Ces trois calculs illustrent trois façon d'aborder le calcul d'indice, par, soit un indice ad hoc, soit un indice en partie fondé sur l'observation mais reposant encore sur des hypothèses paramétriques fortes et un indice dont la forme est fixée par l'observation des fonctions de demande. La comparaison de ces trois indices va nous permettre d'évaluer l'impact des choix sur lesquels reposent chacun de ces indices sur la trajectoire moyenne des prix retracée par chacun.

L'indice de Laspeyres repose sur un panier fixe de biens mis à jour annuellement. Le panier est la réunion des biens vendus lors de la *période de base* pour l'année, couvrant les quatre premières semaines de l'année (i.e. le mois de janvier). Les prix de base correspondent à la moyenne des prix des produits calculée sur la période de base et les quantités de base correspondent à la somme des quantités vendues, calculée sur la période de base. La formule de calcul appliquée est du type de celle de l'indice associé à l'utilité de Léontief avec des coefficients de pondérations correspondant aux quantités de base. Pour l'exercice, lorsqu'un produit n'est pas vendu lors d'un mois donné, son prix est estimé en appliquant au dernier prix observé la variation mensuelle effectivement observée sur les produits présents au cours des deux mois successifs. Cet algorithme est appliqué itérativement en cas de disparition définitive du produit. C'est aux remplacements près (donc aux ajustement qualité près), la procédure appliquée dans l'IPC lorsqu'un produit est absent du magasin où il est suivi. Dans l'alimentaire, les ajustements qualité sont très faibles – estimés à moins de 0,1% de croissance annuelle (Guédès 2004) – de sorte qu'on peut penser que l'absence de mécanique de remplacement ne biaise probablement que faiblement l'indice obtenu. En revanche, l'indice ainsi calculé ne prend pas en compte les promotions des fabricants (comme par exemple la vente de deux yaourts pour le prix d'un). En effet, au passage en caisse, les promotions des fabricants apparaissent avec un code-barres sans relation avec le produit vendu hors promotion. Le lien entre les deux produits n'est pas fait dans cette étude et par la mécanique du panier fixe annuel, les promotions de fabricants qui n'auraient pas lieu en janvier ne sont pas prises en compte dans l'indice. Cette limite implique que l'indice de Laspeyres ainsi construit n'est pas sensible aux promotions des fabricants, ce qui engendre donc un biais en niveau et donc, éventuellement en tendance. À noter que dans l'IPC, un tel biais n'existe pas puisque les promotions des fabricants sont suivies et, le cas échéant, reliées par l'enquêteur au produit élémentaire concerné, le prix suivi dans l'IPC étant un prix unitaire (par unité de volume, de poids, ou autre selon ce qui est pertinent pour le produit concerné).

Le calcul d'un indice CES suppose d'abord que les paramètres de pondération individuelle des produits et d'élasticité de substitution soient fixés. Ils sont estimés économétriquement en considérant l'en-

semble des achats de yaourts (prix et quantités) réalisés au cours des trois années d'observation. Cette estimation permet en particulier de fixer, pour chaque produit i, un coefficient de préférence élémentaire α_i (voir formule d'indice table 1) qui traduit, à tout instant, la préférence du consommateur pour le bien considéré, que ce bien soit ou non disponible à la vente. Ainsi construite, l'utilité qui conduit les choix du consommateur représentatif est stable dans le temps : les nouveau produits peuvent donc être intégrés au fil du temps et les produits qui disparaissent de la vente sortent de l'indice. Les promotions des fabricants s'insèrent naturellement dans le calcul.

Le calcul d'un indice à utilité constante fondé sur une demande log-linéaire (formule 10) requiert, comme pour l'utilité CES, l'estimation de paramètres. Comme pour l'utilité CES, l'utilité est stable dans le temps : selon les valeurs estimées de paramètres, les nouveaux produits peuvent être intégrés naturellement dans l'indice en considérant que les prix des produits absents de la vente sur un mois donné sont infinis.

3.1 Estimation économétrique des paramètres des modèles

La détermination des paramètres de l'utilité CES se fonde sur la relation de base de l'équation de demande (voir table 1). En prenant le logarithme de la fonction de demande, nous obtenons une équation structurelle de la forme (bien i, période t) :

$$\ln(x_{it}) = \underbrace{\varepsilon \ln(\alpha_i)}_{c_i} - \varepsilon \ln(p_{it}) + \underbrace{\ln R_t - \ln\left[\sum_k \alpha_k \left(\frac{p_{kt}}{\alpha_k}\right)^{1-\varepsilon}\right]}_{\nu_t} \tag{11}$$

Les coefficients c_i et ε peuvent donc être estimés en régressant $\ln(x_{it})$ sur $\ln(p_{it})$, le terme ν_t étant considéré ici comme l'aléa [9]. Plusieurs méthodes d'estimation sur données de panel peuvent être envisagées (estimateur en différences ou à effet fixe). Le point essentiel est qu'il est hautement vraisemblable que le prix p_{it} soit endogène dans l'équation. En effet, on peut imaginer que le vendeur adapte son prix à la demande, ce qui engendre dans l'estimation par moindres carrés ordinaires un biais de simultanéité. Afin de lever cette endogénéité, il convient d'utiliser un instrument. L'équation structurelle qui nous intéresse ici est une équation de demande. Pour identifier cette équation, nous cherchons donc un instrument du prix, c'est-à-dire une variable corrélée avec le prix et qui, dans l'équation de demande, est exogène. Concrètement, toute variable liée, par exemple, aux coûts de production est un candidat potentiel. Nous utilisons la variable d'indice des prix de gros alimentaires pour le lait de consommation publiée par l'Insee tous les mois. Cette variable est ré-échantillonnée afin de disposer d'un indice hebdomadaire. L'élasticité (et les effets fixes produits le cas échéant) sont estimés par doubles moindres carrés. Les résultats des différentes régressions sont détaillés dans la table 2. Ils indiquent de manière claire que le prix est une variable endogène dans l'équation de demande et que l'instrument retenu est valide : l'estimation de l'élasticité passe de $0,373$ dans le cas des moindres carrés sans effets fixes à $1,83$ pour l'estimation en doubles moindres carrés sur les différences. Les régressions en niveau et en différences

9. Pour le calcul de l'indice CES, seuls ces coefficients importent. Ainsi, il n'est pas utile de régresser $\ln(x_{it})$ sur le revenu par exemple, puisqu'on ne cherche pas de coefficient associé à cette variable. Il est d'autant plus justifié de traiter le revenu comme un aléa dans la régression précédente que cette variable est très probablement endogène dans la régression. Traitée comme un aléa, elle ne pose pas difficulté pour la convergence des coefficients estimés par régression. Il en est de même de la variable complémentaire également intégrée à l'aléa dans la régression (11).

conduisent aux même résultats, s'agissant des doubles moindres carrés. Nous retenons la régression en niveau par double moindres carrés comme estimation de référence. Outre le fait que cette estimation est plus précise que celle des doubles moindres carrés sur les différences lorsque les deux sont convergentes, l'estimation d'effets fixes produits (c_i dans l'équation 11) nous permet d'estimer les coefficients α_i. En effet, dans ce cas, un estimateur sans biais de ces coefficients est $\hat{\alpha}_i = \exp(\hat{c}_i/\hat{\varepsilon})$.

TABLE 2 – Estimation des paramètres de l'utilité CES (Eq. 11)

Régression	$\hat{\varepsilon}$	effet fixe produits	AUX
OLS	$0,373^{***}$ $(0{,}014)$	non	
Est. à effet fixe	1.21^{***} $(0{,}039)$	oui	
OLS sur les Δ	1.27^{***} (0.057)	non	
2SLS sur les niveaux	1.82^{***} (0.090)	oui	$0,36^{***}$ (0.005)
2SLS sur les Δ	1.83^{***} (0.222)	non	$0,24^{***}$ (0.036)

Note : Δ désigne les différences premières. 3 étoiles indiquent une significativité du paramètre à 1%. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses. Pour les doubles moindres carrés (indiqués "2SLS" dans le tableau ; les moindres carrés ordinaires sont indiqués "OLS"), la régression auxiliaire consiste à régresser le logarithme du prix de vente du produit sur le logarithme de l'indice des prix de gros alimentaires pour le lait de consommation et des effets fixes produits lorsque ces derniers sont inclus dans l'équation principale (colonne "effets fixes produits"). Quand la régression est en différences, l'équation auxiliaire est également traitée en différences. Environ 34000 observations contribuent au calcul. AUX est le coefficient du logarithme du prix du lait dans la régression auxiliaire du logarithme du prix

La figure 2 indique la distribution des α_i. Cette distribution nous renseigne sur les différences d'attrait que revêtent les différents yaourts aux yeux du consommateur. Les différences sont assez sensibles et la contribution à l'utilité peut aller d'un rapport de 1 à 20 selon les produits considérés.

Comme pour la détermination des paramètres de l'utilité CES, l'estimation des paramètres de la demande empirique log-linéaire se fonde sur la relation de base de l'équation de demande (8). Nous en déduisons une équation structurelle :

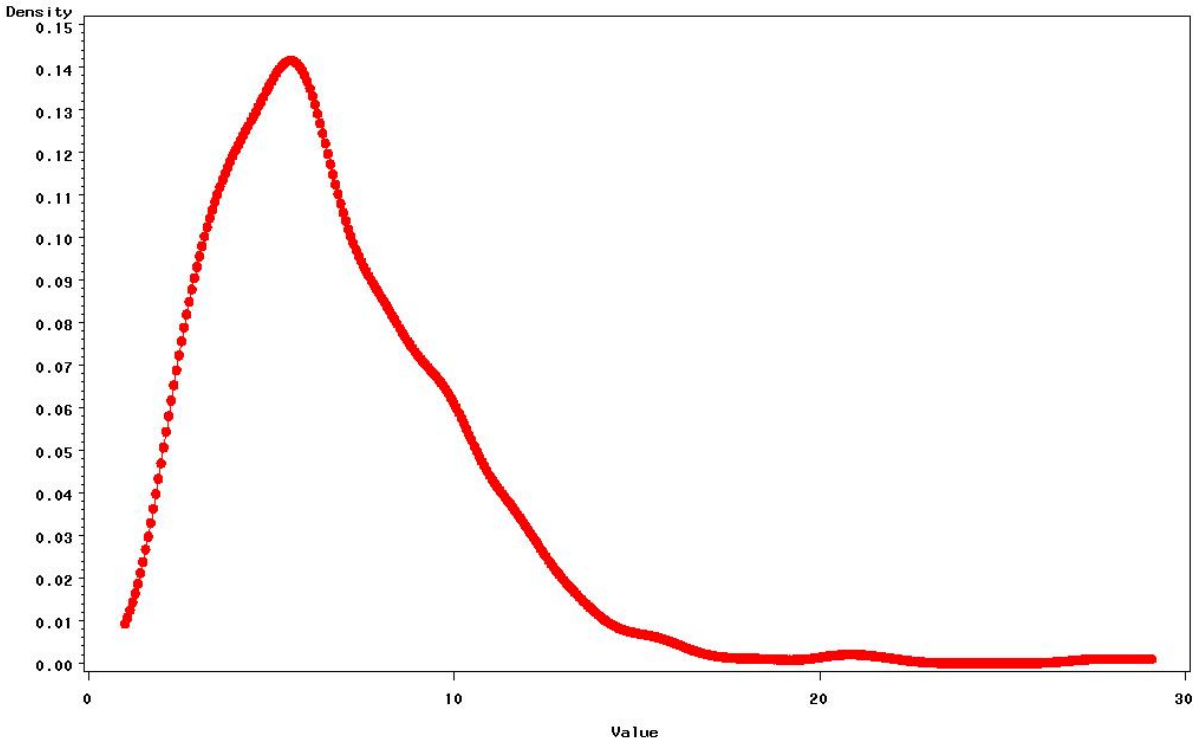
$$\ln(x_{it}) = \gamma_i + \zeta_i \ln(p_{it}) + \beta \ln(R_t) \tag{12}$$

Les coefficients de l'équation précédente peuvent s'estimer par régression de $\ln(x_{it})$ sur les $\ln(p_{it})$ et $\ln(R_t)$.

Néanmoins, comme précédemment, le logarithme du prix p_{it} est endogène dans la régression, pour les mêmes raisons que celles évoquées à propos de l'utilité CES. Nous n'avons à disposition qu'un seul instrument pour l'ensemble des prix des produits, par conséquent nous ne sommes pas en mesure d'identifier l'ensemble des coefficients ζ_i. En revanche, si nous faisons l'hypothèse que tous les ζ_i sont identiques, alors l'équation précédente se simplifie en :

$$\ln(x_{it}) = \gamma_i + \zeta \ln(p_{it}) + \beta \ln(R_t) \tag{13}$$

FIGURE 2 – Distribution des coefficients α_i figurant dans l'équation 11 (pondération des produits dans l'utilité CES)



Note : Les coefficients α_i sont déduits des effets fixes c_i de la régression 2SLS en niveau et découlent de la relation $\hat{\alpha_i} = \exp(\hat{c_i}/\hat{\varepsilon})$. Estimation par la méthode des noyaux.

Lecture : La courbe s'interprète comme un histogramme continu des α_i : 97% des α_i ont une valeur comprise entre 0 et 15, la valeur la plus fréquente étant (le mode principal) 5,7.

Cette équation est identifiable si la dépense R_t est exogène dans l'équation ou si on dispose d'un instrument pour la dépense [10] R_t. On peut imaginer des causes d'endogénéité de la dépense : par exemple, si le consommateur est *price taker*, alors il est vraisemblable que le vendeur, en situation de monopole, fixe les prix de façon à maximiser sa recette (en l'occurrence la dépense du consommateur) en connaissant la réponse du consommateur aux variations de prix qu'il introduit ; dans ce cas, les quantités vendues résultent d'une détermination simultanée des prix, de la dépense et des quantités. On cherche à tester l'endogénéité de la variable de dépense à l'aide d'un instrument de cette variable dans l'équation de demande, c'est-à-dire à l'aide d'une variable corrélée à la dépense mais qui ne joue pas dans la formation de la demande. Par exemple, une variable de salaire ne convient pas, car si elle est effectivement corrélée avec la dépense, il est vraisemblable qu'elle joue aussi dans la formation de la demande. Donc cette variable ne peut pas constituer un instrument pour une équation de demande. La solution retenue consiste à considérer une variable indicatrice de fin de mois. En effet, sur le plan des déterminants de la demande, rien n'indique que la fin du mois constitue une période privilégiée pour acheter des yaourts. En revanche, la plupart des salariés voient leur paie versée en fin de mois, donc la période de fin de mois est vraisemblablement une période dans laquelle le consommateur dispose de moins de ressources financières à consacrer aux achats de consommation courante. Une variable indicatrice de fin de mois (nous avons retenu la période du 23 au 30) est donc un candidat : empiriquement, cette variable est effectivement corrélée négativement à la dépense (voir colonne "AUX2" de la table 3). En revanche, on constate que l'instrument est assez peu puissant puisque les écarts-types du coefficient de la dépense dans les régressions par moindres carrés en deux étapes sont considérablement augmentés. Au final, un test de Hausman indique que la dépense n'est pas endogène dans l'équation de demande. Nous retenons donc la spécification en niveau avec instrumentation du prix seulement (régression "2SLS sur les niveaux (^{2})" de la table 3).

Comme pour l'indice CES, l'indice fondé sur la demande log-linéaire permet de traiter les produits entrants et sortants de manière naturelle en considérant que les produits absents sur une période sont de prix infini. La figure 3 donne le tracé des coefficients γ_i de la spécification (13) pour la régression de référence. Ces coefficients sont tous négatifs et leur dispersion va de 0 à -6, ce qui signifie que le poids de la contribution des produits à l'indice (voir relation 10) va de 1 à $1/400$.

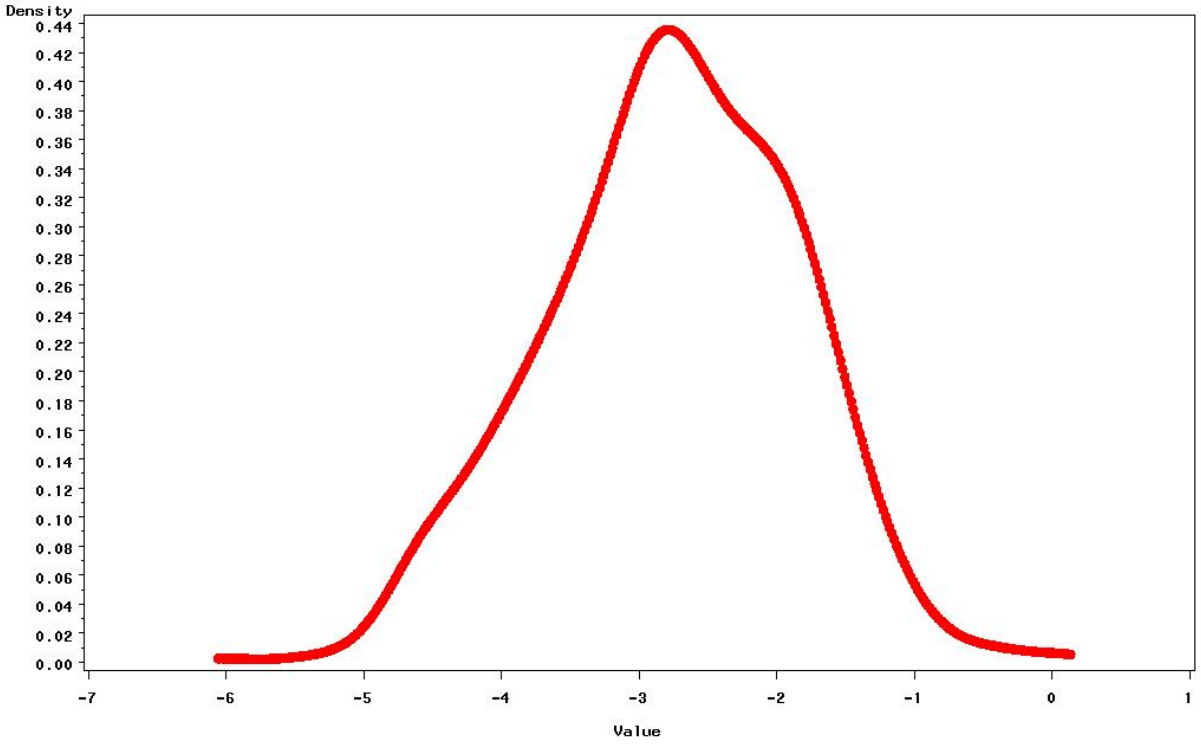
3.2 Résultats sur les indices

La figure 4 donne le tracé des trois indices étudiés. Les indices sont calculés mensuellement, c'est-à-dire qu'on considère ici les quantités vendues mensuellement et le prix moyen pratiqué pour chaque article sur le mois considéré. On peut noter que l'indice de Laspeyres est moins bruité que les deux autres. Cela est lié au fait que les indices CES et log-linéaire sont, par construction, sensibles aux entrées-sorties de biens dans le magasin. Ceci vaut pour les produits dont la présence est quasi-continue mais qui peuvent disparaître ponctuellement. Ceci vaut également pour les promotions des fabricants dont la durée de présence dans les données de caisses est relativement brève.

Afin de mieux comprendre les différences entre ces indices, la figure 5 met en regard les indices avec les taux de produits en promotion observé chaque mois (pondération en nombre de références d'articles

10. Ce problème ne se posait pas lors de la régression (11) car le coefficient de R_t dans l'équation structurelle était unitaire et la variable R_t ne faisait donc pas partie des variables explicatives.

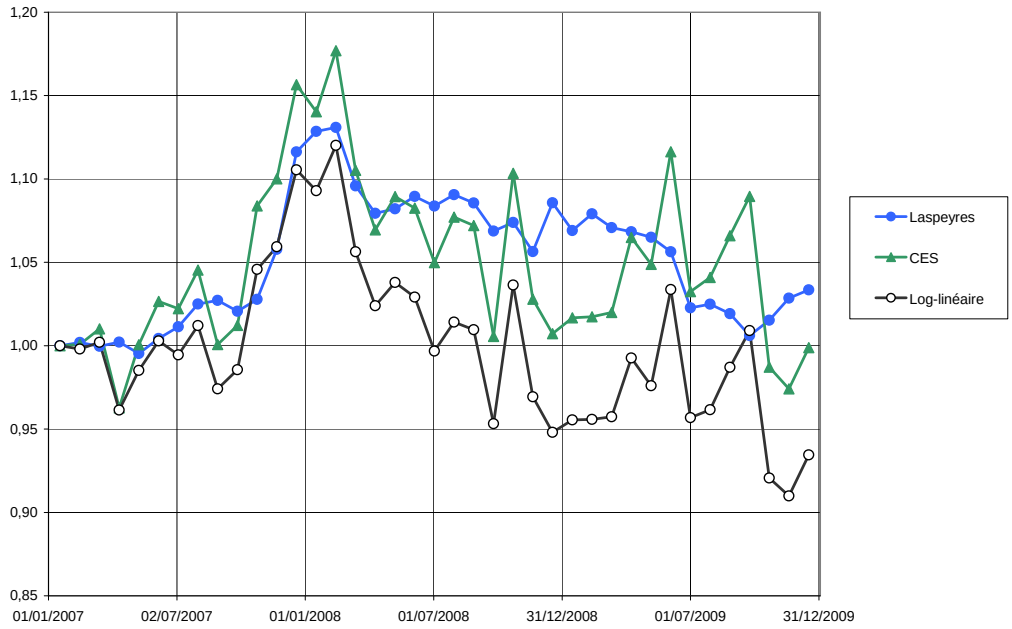
FIGURE 3 – Distribution des coefficients γ_i figurant dans l'équation 13 (multiplicateur constant de la demande log-linéaire)



Note : Les coefficients correspondent aux effets fixes de la regression 2SLS en niveau avec régression auxiliaire pour les prix, la dépense étant considérée comme exogène. Estimation par la méthode des noyaux.

Lecture : La courbe s'interprète comme un histogramme continu des γ_i : 96% des γ_i ont une valeur comprise entre -5 et -1, la valeur la plus fréquente étant (le mode principal) -2,7.

FIGURE 4 – Tracé des indices mensuels de Laspeyres, CES et log-linéaire entre 2007 et 2010



Note : L'indice de Laspeyres est chaîné annuellement et à panier fixe mis à jour annuellement.

TABLE 3 – Estimation des paramètres de la demande log-linéaire (Eq. 12)

Régression	$\hat{\zeta}$	$\hat{\beta}$	effet fixe produit	AUX1	AUX2
OLS sur les niveaux	$-1,13^{***}$ (0,04)	$1,09^{***}$ (0,02)	oui		
OLS sur les Δ	$-1,19^{***}$ (0,06)	$1,00^{***}$ (0,03)	non		
2SLS sur les niveaux	$-2,00^{***}$ (0,18)	$0,67^{*}$ (0,42)	oui	$0,26^{***}$ (0,02)	$-0,017^{***}$ (0,002)
2SLS sur les Δ	$-1,21$ (1,26)	$2,51^{*}$ (1,63)	non	$0,24^{***}$ (0,03)	$-0,005^{***}$ (0,001)
2SLS sur les niveaux (^{2})	$-1,86^{***}$ (0,10)	$1,08^{***}$ (0,02)	oui	$0,26^{***}$ (0,02)	

Note : Δ désigne les différences premières. 3 étoiles indiquent une significativité du paramètre à 1% ; 1 étoile indique une significativité à 15%. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses. Pour les doubles moindres carrés (indiqués "2SLS" dans le tableau ; les moindres carrés ordinaires sont indiqués "OLS") les régressions auxiliaires consistent à régresser : 1) le logarithme du prix de vente du produit sur le logarithme de l'indice des prix de gros alimentaires pour le lait de consommation ; 2) le logarithme de la dépense sur l'indicatrice de fin de mois. Quand la régression est en différences, l'équation auxiliaire est également traitée en différences. Environ 34000 observations contribuent au calcul. AUX1 est le coefficient du logarithme du prix du lait dans la régression auxiliaire du logarithme du prix ; AUX2 est le coefficient de l'indicatrice de fin de mois dans la régression auxiliaire du logarithme de la dépense. (^{2}) : régression sans instrumentation de la dépense

disponibles à la vente). On constate assez nettement la croissance des prix vue par les indices CES et log-linéaire lorsque le taux de promotion est bas, tandis que les prix vus par ces mêmes indices décroissent lorsque le taux de promotion est élevé. Cette mise en regard confirme que l'écart entre l'indice de Laspeyres et l'indice CES est principalement lié aux promotions qui ne sont pas prises en compte dans le premier, tandis qu'elles le sont dans le second.

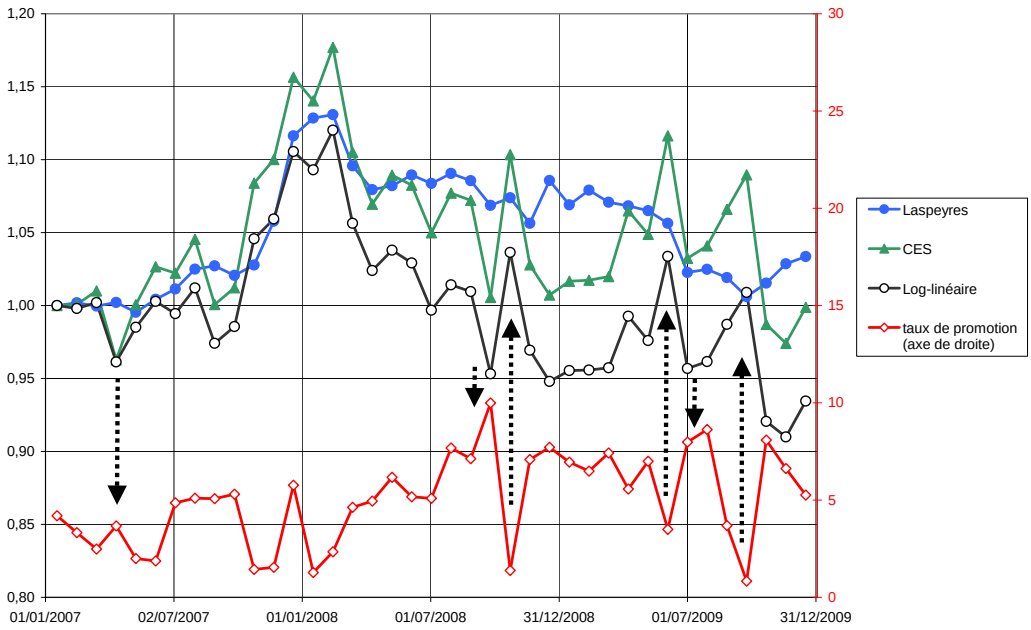
En dehors des effets promotionnels, on peut noter la bonne cohérence des indices de Laspeyres chaîné et de celui fondé sur l'utilité CES. En revanche, l'indice fondé sur la demande log-linéaire témoigne d'une croissance des prix plus faible. Si on examine plus avant la formule d'indice (10), on peut montrer, sous diverses hypothèses de petitesse de certains termes (voir annexe), que l'indice est approximativement égal à :

$$\begin{aligned} I_{LogLin}^{t',t} \quad \simeq \quad & 1 + \sum_{i \in \overset{\circ}{I}} \omega_{it} \frac{p_{it'} - p_{it}}{p_{it}} + \\ & \frac{1}{1+\zeta} \left(\sum_{i \in \overset{\circ}{I}} \omega_{it} - \sum_{i \in \overset{\circ}{I}} \omega_{it'} \right) + \frac{1-\beta}{1+\zeta} \frac{R_{t'} - R_t}{R_t} \left(1 - \sum_{i \in \overset{\circ}{I}} \omega_{it} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

où $\overset{\circ}{I}$ désigne l'ensemble des produits présents à toutes les dates d'observation, ω_{it} est le poids[11] du produit i dans la dépense à la date t, cette dernière étant notée R_t. Le premier terme de cette expression prend la forme d'un indice de Laspeyres dans lequel les biens présents à la période de base t mais pas en t' se voient affectés une évolution des prix nulle (en pratique, nous prenons, pour définir $\overset{\circ}{I}$, l'ensemble des biens présents à toutes les dates). Empiriquement, l'indice de prix correspondant aux seuls biens

11. À tout instant t, $\sum_i \omega_{it} = 1$.

FIGURE 5 – Tracé des indices mensuels de Laspeyeres, CES et log-linéaire et taux de produits en promotion



Note : Les flèches indiquent des mois avec des taux de promotion élevés ou faibles selon le cas qui se traduisent par des prix (resp.) bas ou élevés dans les indices CES et log-linéaire.

présents à toutes les dates, reproduit à la figure 6, témoigne d'une variation positive des prix sur la période d'observation. Le premier terme de l'expression (14) est donc positif. La trajectoire de l'indice des prix des produits présents à toutes les dates est semblable à celle de l'indice de Laspeyres chaîné présenté à la figure 4 se rapportant à l'ensemble des biens.

Les deux autres termes de l'expression (14) sont liés, d'une part aux variations du poids, dans la dépense contemporaine, des produits présents à toutes les dates d'observation et d'autre part, aux variations de la dépense totale. Empiriquement, le poids des produits présents à toutes les dates reste relativement stable sur la période d'observation (figure 7). On peut toutefois noter une variabilité accrue à partir de l'année 2009 en raison, notamment, d'une plus grande sensibilité du poids au taux de promotion, traduisant vraisemblablement des substitutions plus fréquentes. La baisse du poids des produits présents à toutes les dates se manifeste surtout au dernier trimestre 2009. Le deuxième terme de l'expression (14) est donc empiriquement négatif.

On observe (voir figure 1) enfin une décroissance tendancielle de la dépense sur l'ensemble de la période observée. Comme $\zeta < -1$ et $\beta > 1$, le dernier terme de l'expression (14) est négatif.

Du point de vue économique, le deuxième terme de l'expression (14) traduit l'effet, sur l'indice des prix, des substitutions entre produits (puisque le premier terme est un indice de Laspeyres supposant donc l'absence de substitutions) ainsi que celui des entrées/sorties de produits, tandis que le dernier terme est sensible à l'évolution d'ensemble de la dépense. Lorsque les utilités sont homothétiques, ce dernier terme disparaît. En l'espèce, étant données les valeurs estimées des paramètres ζ et β, une baisse de la dépense est associée à un gain d'utilité ; dans ce contexte, les yaourths s'apparentent à un bien inférieur. L'application numérique proposée en annexe à partir des données observées montre que les effets de substitution sont environ deux fois plus importants que ceux liés à la baisse tendancielle de la dépense.

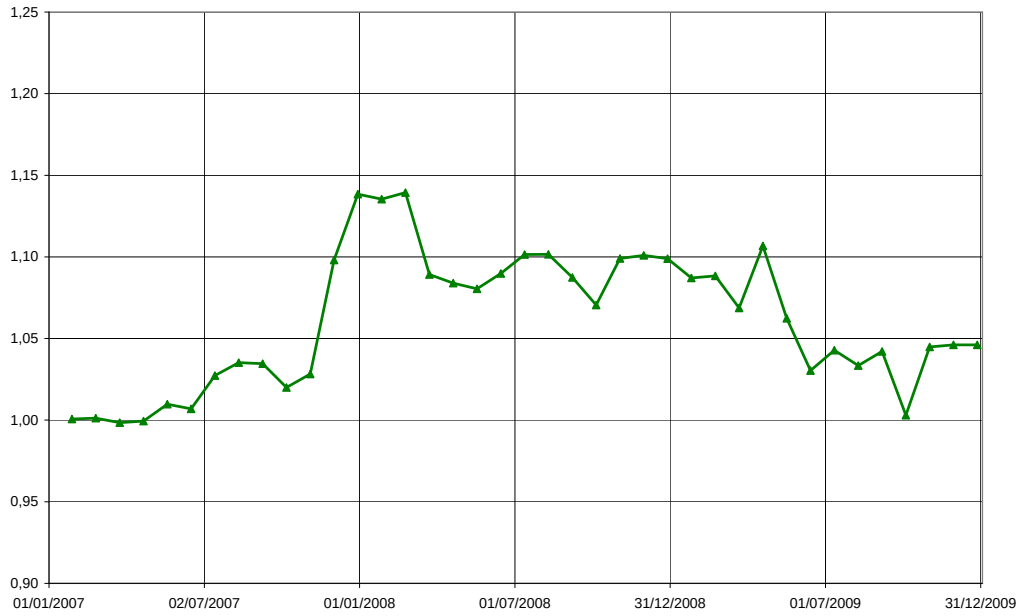
3.3 De la notion de produit

Le cadre des indices à utilité constante suppose d'avoir *a priori* défini le périmètre sur lequel le consommateur représentatif réalise des substitutions entre produits. Le raisonnement exposé au paragraphe 2 justifie le choix du champ géographique retenu (le magasin). Au-delà, le champ économique sur lequel le consommateur réalise ses substitution est aussi important. En effet, nous avons jusqu'à présent travaillé dans un modèle où tous les yaourts sont identiquement substituables. On peut défendre l'idée selon laquelle, en premier lieu, des yaourts de même nature sont substituables, tandis que d'autres ne le sont pas. En d'autre termes, il peut être raisonnable d'envisager de restreindre le champ des produits substituables à des produits plus proches que le champ large de la famille des yaourts.

Afin d'évaluer l'ampleur des effets du choix d'un périmètre de produit plus restreint sur les indices et à titre d'exemple, nous reprenons la modélisation précédente en distinguant trois variétés de yaourts : les yaourts natures, les yaourts aromatisés et les yaourts aux fruits. Ces trois catégories représentent, respectivement, environ 38%, 18% et 45% des ventes. La modélisation adoptée suppose qu'au sein de chacune de ces trois variétés, le consommateur substitue des produits aux autres avec une élasticité constante (modélisation CES), tandis qu'entre variétés, les produits ne sont pas substituables.

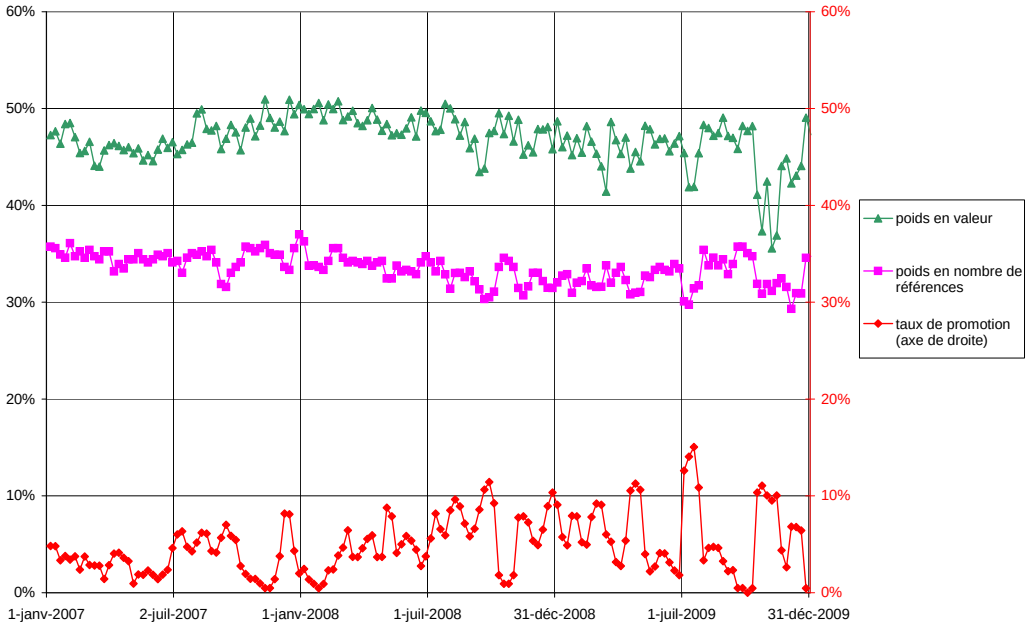
Techniquement, le modèle consiste à ajuster une utilité comme présentée au paragraphe 3.1 pour chacune des variétés de produits précédentes, puis à agréger les trois indices CES obtenus par agréga-

FIGURE 6 – Indice de prix de Laspeyeres des produits présents à toutes les dates (indice mensuel)



Note : Il y a environ 200 références de produits présentes chaque semaine d'observation. Les produits présents sur l'ensemble de la période 2007-2009 représentent approximativement 35% des produits (voir figure 7). Indice à base fixe sur les quatre premières semaines d'observation.

FIGURE 7 – Poids en dépense totale des produits présents à toutes les dates



tion de Laspeyres chaînée annuellement, les pondérations étant fondées sur le poids de chaque variété dans les dépenses de l'ensemble des produits de la famille des yaourts aux périodes de base (premier mois de l'année courante). Les paramètres issus du modèle économétrique sont présentés à la table 4. Les élasticités estimées sont un peu plus faibles que lorsque tous les produits de la famille des yaourts sont traités simultanément, hormis pour les yaourts aux fruits où elle est légèrement plus élevée. L'instrument du prix de gros du lait se révèle, là-encore, pertinent.

TABLE 4 – Estimation des paramètres de l'utilité CES pour les trois variétés de yaourts

Régression	$\hat{\varepsilon}$	effet fixe produit	AUX	$Nobs$
yaourt nature	$1,36^{***}$ $_{(0,12)}$	oui	$0,54^{***}$ $_{(0.01)}$	7 167
yaourt aromatisé	1.44^{***} $_{(0.21)}$	oui	$0,27^{***}$ $_{(0.01)}$	6 631
yaourt aux fruits	1.90^{***} $_{(0.12)}$	oui	$0,30^{***}$ $_{(0.01)}$	20 074

Note : Les régressions correspondent à l'estimateur "2SLS sur les niveaux" (voir table 2) avec effet fixe produit. 3 étoiles indiquent une significativité du paramètre à 1%. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses. Pour plus de détails se reporter à la table 2. Nobs indique le nombre d'observations utilisées. AUX est le coefficient du logarithme du prix de gros du lait dans la régression auxiliaire du logarithme du prix.

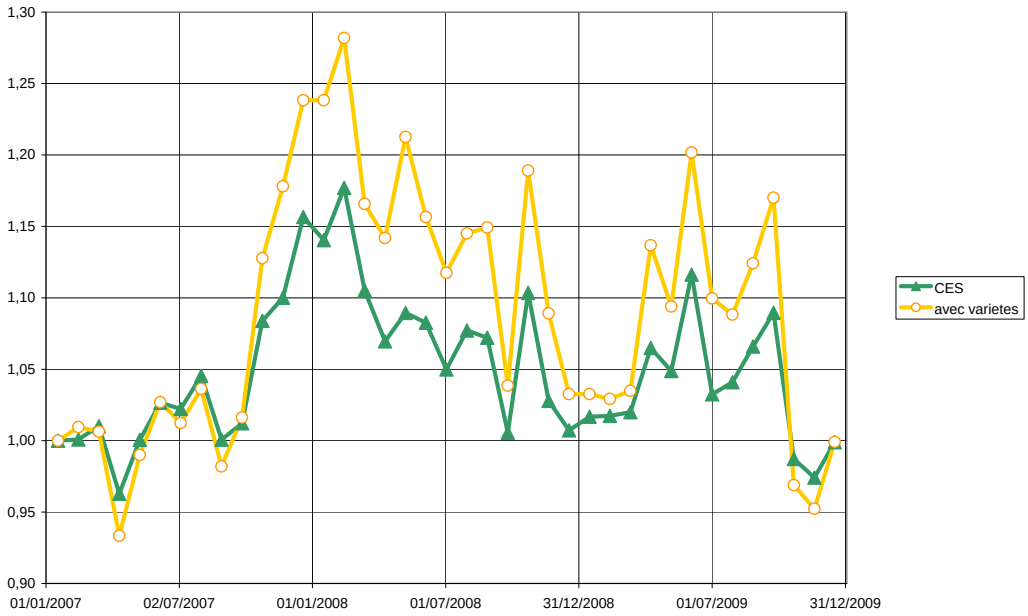
Des indices par variété de produits sont calculés pour le magasin étudié. Puis ces indices sont agrégés par agrégation de Laspeyres chaînée annuellement. Les résultats sont présentés à la figure 8.

Comme attendu, le fait d'adopter un modèle dans lequel les produits ne sont pas tous substituables conduit à un indice globalement plus élevé que l'indice dans lequel tous les produits sont substituables. L'effet est significatif, puisque l'ordre de grandeur de l'écart (pouvant aller jusqu'à 10 points d'indice sur certaines périodes) entre l'indice calculé sur les variétés et celui calculé sur la famille complète est comparable aux plus grands écarts constatés entre les indices sensibles aux promotions (CES et log-linéaire) et les autres (Laspeyres) – voir figure 4. Ces écarts vont croissants avec l'ampleur des variations d'indice, ce qui est naturel car lorsque les variations de prix sont importantes, les mécanismes de substitution jouent davantage.

4 Conclusion

Nous avons montré trois approches différentes de construction d'un indice de prix. La première, l'approche classique, se fonde essentiellement sur des propriétés *ad hoc* qu'un indice de prix devrait voir vérifiées, ces propriétés étant héritées des propriétés vérifiées par une séquence de prix successifs d'un produit donné (Eichhorn & Voeller 1976). Cette approche, dite approche axiomatique (ILO, IMF, OECD, UNECE, Eurostat & The World Bank 2004), est celle qui sous-tend la forme des indices de prix à la consommation "officiels". La deuxième approche consiste à dériver la formule d'indice de l'adoption d'une fonction d'utilité pour un consommateur représentatif et estimer les paramètres de cette fonction à partir de l'observation des demandes (quantités et prix). La troisième approche repose sur l'observation et la paramétrisation des fonctions de demande à partir desquelles on infère un indice à utilité

FIGURE 8 – Indices CES mensuels pour la famille complète des yaourts et pour la famille répartie en trois variétés distinctes



Note : la famille des yaourts est répartie en trois variétés (yaourts natures, aromatisés et aux fruits). L'indice CES fondé sur ce découpage (après agrégation de Laspeyres chaînée annuellement) s'intitule "avec variétés". L'indice "CES" est celui présenté précédemment (voir figures 4 et 5).

constante. Les deux dernières approches ne sont envisageables qu'à partir de données de caisses : en effet, la disponibilité récente des données de caisses permet réellement d'envisager de mettre en pratique le concept d'indice à utilité constante. Par rapport à l'approche classique sous-jacente à la plupart des indices nationaux des prix à la consommation, les indices à utilité constante peuvent grandement différer, ainsi qu'en témoigne cette étude, même si une grosse partie de la différence semble puiser sa source dans les promotions, le plus souvent imparfaitement prises en compte dans l'approche classique. Au-delà, les développements présentés dans ce papier montrent que la mécanique de calcul peut se trouver simplifiée du fait de l'adoption d'un cadre à utilité constante, notamment s'agissant des remplacements de produits qu'il n'est pas indispensable de traiter de manière spécifique dans le contexte des indices à utilité constante [12], tandis qu'ils doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les calculs d'indices classiques.

Des travaux restent à conduire pour mesurer les conséquences de l'estimation économétrique de paramètres d'indice sur l'indice calculé. En particulier, la réflexion sur les indices à utilité constante ne peut pas se dispenser d'un travail plus qualitatif sur le périmètre des produits susbtituables pour le consommateur. Idéalement, il conviendrait aussi de s'affranchir au maximum d'hypothèses pas toujours justifiées sur la spécification de telle ou telle fonction d'utilité ou de demande en se rapprochant d'une exploitation non paramétrique des données de caisses. Des travaux plus empiriques sur la définition du champ [13] des produits substituables seraient aussi utiles pour approfondir ces réflexions.

Références

Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. & Solow, R. M. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency, *The Review of Economics and Statistics* **43**(3) : 225–250.

Balk, B. (1999). On Curing the CPI's Substitution and New Goods Bias, *Discussion paper*, The Ottawa Group, 1995.

Boskin, M. J., Dulberger, E. R., Gordon, R. J., Griliches, Z. & W.Jorgenson, D. (1998). Consumer Prices, the Consumer Price index, and the Cost of Living, *Journal of Economic Perspectives* **12**(1) : 3–26.

Clerc, E. & Coudin, E. (2010). L'IPC, miroir de l'évolution du coût de la vie en France ? Ce qu'apporte l'analyse des courbes d'Engel, *Économie et Statistique* **433–434** : 77–105.

Deaton, A. & Muelbauer, J. (1980). *Economics and consumer behavior*, Cambridge University Press.

Diewert, E. (1998). Index Number Issues in the Consumer Price Index, *Journal of Economic Perspectives* **12**(1) : 47–58.

Eichhorn, W. & Voeller, J. (1976). *Theory of the Price Index*, Springer-Verlag.

Feenstra, R. C. & Shapiro, M. D. (2003). *High-Frequency Substitution and the Measurement of Price Indexes*, University of Chicago Press, pp. 123–146.

Guédès, D. (2004). Impact des ajustement de qualité dans le calcul de l'indice des prix à la consommation, *Document de travail F0404*, INSEE.

Hamming, R. (1997). *Digital Filters*, 3 edn, Dover.

12. Pourvu toutefois que l'on dispose *a priori* de la liste des produits qui sont consommés au cours de l'année, comme c'est le cas dans cette étude et qu'on ait pu calculer *ex-ante* les paramètres de préférence correspondants.
13. géographique ou selon la nature des produits

Hausman, J. (1981a). Exact consumer's surplus and deadweight loss, *The American Economic Review* **71**(4) : 662–676.

Hausman, J. (1981b). Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss, *American Economic Review* **71**(4) : 662–676.

Hausman, J. (2003). Sources of Bias and Solutions to Bias ind the Consumer Price Index, *Journal of Economic Perspectives* **17**(1) : 23–44.

Hausman, J. A. & Newey, W. K. (1995). Nonparametric Estimation of Exact Consumers Surplus and Deadweight Loss, *Econometrica* **63**(6) : 1445–1476.

Hausman, J. A., Pakes, A. & Rosston, G. L. (1997). Valuing the Effect of Regulation on New Services in Telecommunications, *Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics* pp. 1–54.

Hausman, J. & Leibtag, E. (2007). Consumer benefits from increased competition in shopping outlets : measuring the effect of WAL-MART, *Journal of Applied Econometrics* **22** : 1157–1177.

Herpin, N. & Verger, D. (2008). *Consommation et modes de vie en France*, 3 edn, La Découverte.

Hurwicz, L. & Uzawa, H. (1971). On the integrability of demand functions, *in* J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter & H. F. Sonnenschein (eds), *Preferences, Utility, and Demand*, Harcourt, pp. 114–148.

ILO, IMF, OECD, UNECE, Eurostat & The World Bank (2004). *Consumer price index manual : Theory and Practise*, International Labour Office.

Magnien, F. & Pougeard, J. (2000). Les indices à utilité constante : une référence pour mesurer l'évolution des prix, *Économie et Statistique* **335** : 81 – 94.

Mesler, D. (2006). Accounting for the effects of new and disappearing goods using scanner data, *Review of Income and Wealth* **52**(4) : 547–568.

Moulton, B. R. & Stewart, K. J. (1999). An Overview of Experimental U.S. Consumer Price Indexes, *Journal of Business & Economic Statistics* **17**(2) : 141–151.

Saglio, A. (1994). Comparative changes in average price and a prix index : two case studies, *Discussion paper*, The Ottawa Group, 1994.

Varian, H. (1982a). The Nonparametric Approach to Demand Analysis, *Econometrica* **50**(4) : 945–973.

Varian, H. R. (1975). *Microeconomic Analysis*, The MIT Press.

Varian, H. R. (1982b). Trois évaluation de l'impact "social" d'un changement de prix, *Cahiers du séminaire d'économétrie*.

Viglino, L. (2000). Le concept unificateur des indices de prix et proposition d'un nouvel indice, *Actes des journées de méthodologie statistique*, INSEE.

Annexe

A.1 Résolution du système d'équations différentielles (6) pour les fonctions de demande (8)

Nous avons donc à résoudre en μ le système d'équations différentielles suivant :

$$1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \frac{\partial \mu}{\partial p_i} = p_i^{\zeta_i} \mu^{\beta} e^{\gamma_i}$$

Pour i, nous avons en particulier $\frac{\partial \mu}{\partial p_i} = p_i^{\zeta_i} \mu^{\beta} e^{\gamma_i}$ qui se résout, partiellement, en intégrant sur p_i :

$$\frac{\mu^{1-\beta}}{1-\beta} = \frac{p_i^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} e^{\gamma_i} + C_i(\mathbf{p}_{(i)}; \mathbf{q}, R)$$

où C_i est une fonction dépendant de $\mathbf{p}_{(i)}$ (vecteur des prix $\mathbf{p}$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante), de $\mathbf{q}$ et de R. On peut donc chercher une solution de la forme

$$\mu(\mathbf{p}; \mathbf{q}, R) = \left\{ (1-\beta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} e^{\gamma_i} + C(\mathbf{q}, R) \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}}$$

où C est une fonction dépendant de $\mathbf{q}$ et R. Elle s'obtient en appliquant les conditions limites (voir relation 7) $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{q}, R) = R$, soit :

$$C(\mathbf{q}, R) = \frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} e^{\gamma_i}$$

Finalement,

$$\mu(\mathbf{p}; \mathbf{q}, R) = \left\{ (1-\beta) \left[\frac{R^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} . \frac{p_i^{1+\zeta_i} - q_i^{1+\zeta_i}}{1+\zeta_i} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}}$$

A.2 Approximation de l'indice log-linéaire (14)

La démonstration est fondée sur l'hypothèse que $p_{it} - p_{it'}$, $R_t - R'_t$, $\omega_{it} - \omega_{it'}$ et le complément à 1 de l'indice $I_{LogLin}^{t',t}$ sont des infiniment petits du premier ordre. On se place ici dans le cas où les ζ_i sont tous égaux à un réel unique ζ (cadre retenu pour l'économétrie). Partant de l'expression de (10), au premier ordre, nous avons :

$$I_{LogLin}^{t',t} \simeq 1 + R_t^{\beta-1} \sum_{i=1}^{n} e^{\gamma_i} \frac{p_{it'}^{1+\zeta} - p_{it}^{1+\zeta}}{1+\zeta}$$

Si on note I^t l'ensemble des identifiants de produits présents à la date t, il est possible de définir l'intersection $\overset{\circ}{I}$ de ces ensembles pour toutes les dates d'observation. Ainsi défini, $\overset{\circ}{I}$ correspond à l'ensemble des indentifiants de produits présents à toutes les dates d'observation. À tout instant t, on note $\bar{I}^t$ le complément de $\overset{\circ}{I}$ dans I^t. L'expression précédente peut alors s'écrire :

$$I_{LogLin}^{t',t} \simeq 1 + R_t^{\beta-1} \sum_{i \in \overset{\circ}{I}} e^{\gamma_i} \frac{p_{it'}^{1+\zeta} - p_{it}^{1+\zeta}}{1+\zeta} + R_t^{\beta-1} \sum_{i \in \bar{I}^{t'}} e^{\gamma_i} \frac{p_{it'}^{1+\zeta}}{1+\zeta} - R_t^{\beta-1} \sum_{i \in \bar{I}^{t}} e^{\gamma_i} \frac{p_{it}^{1+\zeta}}{1+\zeta}$$

Puis, à tout instant t, la contrainte budgétaire implique $\sum p_{it} x_{it} = R_t$. En tenant compte de l'expression de la demande (relation 8), il découle que $\omega_{it} = R_t^{\beta-1} p_{it}^{1+\zeta} e^{\gamma_i}$ est le poids du bien i dans la dépense R_t de la date t.

Pour $i \in \overset{\circ}{I}$, par un développement de Taylor au premier ordre en $p_{it'} - p_{it}$, nous avons :

$$p_{it'}^{1+\zeta} - p_{it}^{1+\zeta} \simeq (1+\zeta) p_{it}^{\zeta} (p_{it'} - p_{it})$$

Il en découle que :

$$R_t^{\beta-1}\sum_{i\in\overset{\circ}{I}} e^{\gamma_i}\frac{p_{it'}^{1+\zeta}-p_{it}^{1+\zeta}}{1+\zeta} \simeq \sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}\frac{p_{it'}-p_{it}}{p_{it}}$$

Puis, les autres termes se simplifient en utilisant la contrainte budgétaire et le fait que les poids se somment à 1 pour une date t donnée. Ainsi :

$$R_t^{\beta-1}\sum_{i\in\bar{I}^t} e^{\gamma_i}\frac{p_{it}^{1+\zeta}}{1+\zeta} = \frac{1}{1+\zeta}\left(1-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}\right)$$

De même,

$$R_t^{\beta-1}\sum_{i\in\bar{I}^t} e^{\gamma_i}\frac{p_{it'}^{1+\zeta}}{1+\zeta} = \frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{R_t}{R_{t'}}\right)^{\beta-1}\left(1-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it'}\right)$$

Cette dernière expression peut être simplifiée en s'appuyant sur les hypothèses de petitesse des différences $R_{t'}-R_t$ et $\omega_{it}-\omega_{it'}$. En effet,

$$\frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{R_t}{R_{t'}}\right)^{\beta-1}\left(1-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it'}\right) = \frac{1}{1+\zeta}\left(1+\frac{R_{t'}-R_t}{R_t}\right)^{1-\beta}\left(1-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}+\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}(\omega_{it}-\omega_{it'})\right)$$

En développant au premier ordre et en sommant le résultat avec les deux autres termes déjà explicités, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{LogLin}^{t',t} &\simeq 1+\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}\frac{p_{it'}-p_{it}}{p_{it}}+ \\ &\quad \frac{1}{1+\zeta}\left(\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it'}\right)+\frac{1-\beta}{1+\zeta}\frac{R_{t'}-R_t}{R_t}\left(1-\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}\right) \end{aligned}$$

Application numérique : nous adoptons les valeurs numériques suivantes

- $\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}=0,45$
- $\frac{1}{\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}}\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}\omega_{it}\frac{p_{it'}-p_{it}}{p_{it}}=0,05$
- $\zeta=-1,86$
- $\beta=1,08$
- $\sum_{i\in\overset{\circ}{I}}(\omega_{it}-\omega_{it'})=0,46-0,44=0,02$ (différence des moyennes du premier et dernier semestres d'observation)
- $\frac{R_{t'}-R_t}{R_t}=-0,2$ (la dépense a baissé d'environ 20% entre le premier semestre d'observation et le dernier – voir figure 1)

Avec ces valeurs,

$$\begin{aligned} I_{LogLin}^{2009S2,2007S1} &\simeq 1+\underbrace{0,45\times 0,05}_{0,02}-\underbrace{\frac{1}{0,86}\times 0,02}_{0,02}-\underbrace{\frac{0,08}{0,86}\times 0,2\times(1-0,45)}_{0,01} \\ &\simeq 1-0,01 \end{aligned}$$

On observe, comme prévu, que l'indice $I_{LogLin}^{t',2007}$ est négatif au dernier semestre 2009. Ce calcul numérique nous permet également d'observer les contributions : si l'indice des prix des biens présents à toutes les dates contribue pour 2 points à la hausse, la baisse de la dépense d'ensemble (un point à la baisse) et surtout, les substitutions (2 points à la baisse) font plus que compenser l'évolution à la hausse des prix.