5. $I$ a pour coordonnées $(-2\,;\,2\times(-2)-1)$ ;

c'est-à-dire $I$ est le point de coordonnées $(-2\,;\,-5)$.

Soit $x>0$ ; posons $A(-2+x\,;\,f(-2+x))$

et $B(-2-x\,;\,f(-2-x))$. Dire que $I$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ revient à dire que $I$ est le milieu de $[AB]$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$f(-2+x) = 2\times(-2+x) - 1 + \frac{3}{-2+x-2} = -4+2x-1+\frac{3}{x}.$$

$$f(-2-x) = -4-2x-1-\frac{3}{x}.$$

D'où :
$$\frac{1}{2}\left[f(-2+x)+f(-2-x)\right] = \frac{1}{2}\left(-4-2x-1-\frac{3}{x}-4+2x-1+\frac{3}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times(-10)$$
$$= -5.$$

et $\dfrac{-2+x-2-x}{2} = -2$.

Donc $I$ est bien centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ ; où $I(-2\,;\,-5)$.

6. $f(x) = 2x-1+\dfrac{3}{x+2}$ ; pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et pour tout $x\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ :

$$f'(x) = 2-\frac{3}{(x+2)^2} = 0$$

ssi $\dfrac{2(x+2)^2-3}{(x+2)^2} = 0$

ssi $(x+2)^2 = \dfrac{3}{2}$.

ssi $x = -2-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ou $x = -2+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

INSEE
INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS Contrôleur externe.

ANNÉE 2023

INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N°

Note et appréciations du correcteur :

18,75

ÉPREUVE

de Mathématiques et statistiques.



NOMBRE D'INTERCALAIRES : 4

Exercice 2 : Soit $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$.

1. $x\mapsto 2x^2+3x+1$ définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto x+2$ ; définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x+2=0$ ssi $x=-2$.

Par conséquent, $f$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2. Pour $x\neq 0$ ; 
$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$$
$$= \frac{x^2\times\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\times\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$
$$= x\times\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\ ;$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x+2 = 0^-$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x+2 = 0^+$ .

et $2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) + 1 = 1$ ;

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ ,

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ .

La courbe de $f$ a une asymptote verticale donnée par la droite d'équation $x = -2$ .

3. $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ ; $a, b, c$ dans $\mathbb{R}$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$ .

ssi $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x+2} = \dfrac{(ax+b)(x+2) + c}{x+2}$

ssi $2x^2 + 3x + 1 = ax^2 + (2a+b)x + 2b + c$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Par identification des coefficients des fonctions polynomiales ;

cela équivaut à : $\begin{cases} a = 2 . \\ 2a + b = 3 . \\ 2b + c = 1 . \end{cases}$

i.e $\begin{cases} a = 2 . \\ b = -1 \\ c = 3 . \end{cases}$

Donc , $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x+2}$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$ .

4. Par conséquent , $f(x) - (2x-1) = \dfrac{3}{x+2}$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$ .

ce qui implique $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( f(x) - (2x-1) \right) = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( f(x) - (2x-1) \right) = 0$ , puisque $\dfrac{3}{x+2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

Par conséquent ; $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x - 1$ pour asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$ .

| NUMÉRO DE CANDIDAT | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
|---|---|---|
| | mathématiques et statistiques | 1/4 |

<u>Ex 2</u> : (suite).

6. On établit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $-2$ | | $-2+\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(-2-\sqrt{\frac{3}{2}})$ | $\searrow$ | $-\infty \ \Vert \ +\infty$ | $\searrow$ | $f(-2+\sqrt{\frac{3}{2}})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

après avoir résolu les inéquations $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$.

7. $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(2x-1+\frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[\, x^2 - x + 3\ln(x+2) \,\Big]_1^3$$

$$= 9-3+3\ln(5) - (1-1+3\ln(3))$$

$$= 6+3\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

8. L'aire délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$ est égale à $6+3\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

| NUMÉRO DE CANDIDAT | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
|---|---|---|
| | | |

Exercice 3 :

a) $P(S) = \frac{1}{7}$.

b) $P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$.

c) $$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap S) + P(T \cap \bar{S}) \\ &= \frac{1}{35} + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(T) \\ &= \frac{1}{35} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{35} + \frac{6}{14} \\ &= \frac{2+30}{70} \\ &= \frac{32}{70} \\ &= \frac{16}{35}. \end{aligned}$$

d) $P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{1}{35} \times \frac{35}{16} = \frac{1}{16}$.

2)

Ce n'est pas un schéma de Bernoulli, Lise répète la même expérience ; mais les expériences ne sont pas indépendantes.

| NUMÉRO DE CANDIDAT | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
| --- | --- | --- |
| | Mathématiques et statistiques. | 2/4 |

Exercice 1 :

1. d.

2. (i) Réponse b. ; (ii) Réponse b.

3. b.

4. a.

5. b.

6. c.

7. d

Exercice 5 :

Partie B : On note $x$ le nombre de lots d'affiches ; $y$ le nombre de lots de brochures.

On établit le système : $\begin{cases} 2,4x + 4y = 80 & (L_1) \\ 3x + 2y = 67 & (L_2). \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donc : $(2,4-6)x = 80 - 2\times 67$.

i.e $-3,6x = -54$.

i.e $x = \dfrac{54}{3,6} = 15$.

On substitue $x = 15$ dans $(L_2)$ : $y = \dfrac{67 - 3\times 15}{2} = 11$.

| | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
|---|---|---|
| | | |

L'imprimerie a fabriqué 15 lots d'affiche et 11 lots de brochure en 67 heures et avec 80 kg de papier.

Partie A :

1. On note $a \times 10 + b \times 1$ le nombre à deux chiffres recherché ; où $a \in \{1; \dots; 9\}$ et $b \in \{0; \dots; 9\}$.

Nous cherchons $a \in \{1; \dots; 9\}$ ; $b \in \{0; \dots; 9\}$ tels que :

$$\begin{cases} ab = 15 \\ a \times 10 + b \times 1 + 18 = b \times 10 + a \times 1. \end{cases} \qquad b + 8 \equiv a \ [10].$$

2. $ab = 15$ implique $(a; b) = (3; 5)$ ou $(a; b) = (5; 3)$.

On teste les deux solutions potentielles.

$53 + 18 = 71 \neq 35$. $(5; 3)$ ne convient pas.

$35 + 18 = 53$ ; $(3; 5)$ convient.

Le nombre recherché est 35.

| NUMÉRO DE CANDIDAT | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
|---|---|---|
| | Mathématiques et statistiques . | 3/4 |

Exercice 4 :

1. $\frac{800\,000}{30\,000\,000} = \frac{2}{75} \simeq 0,027$ soit environ 2,7 % .

La part du chiffre d'affaires de cette entreprise dans celui de Logigroupe en 2021 est d'environ 2,7 % .

2. $\frac{800-575}{575} = \frac{9}{23} \simeq 0,391$ soit environ 39,1 % .

Le chiffre d'affaires de LogiEntreprise a progressé de 39,1 % environ entre 2020 et 2021 .

3. Le taux d'évolution de l'année $i$ à $i+1$ est calculé par : $\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$ .

Nous calculons le taux d'évolution moyen comme suit :

$$\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \left( \frac{y_{i+1}}{y_i} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left( -8 + \sum_{i=1}^{8} \frac{y_{i+1}}{y_i} \right) .$$

$$= -1 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \frac{y_{i+1}}{y_i} .$$

$$\simeq 1,635 \simeq 1 + 63,5 \% .$$

Donc l'évolution moyenne du CA entre 2013 et 2021 est d'environ 63,5 % .

| NUMÉRO DE CANDIDAT | ÉPREUVE DE | INTERCALAIRE N° |
| --- | --- | --- |
| | Mathématiques statistiques. | |

5. On note $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i$ ; $\bar{y} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i$.

Donc, $\bar{x} = 5$ et $\bar{y} = 265$.

6. On note $\mathrm{Cov}(X;Y) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$.

et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2 = \sigma_X^2$.

La droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés a pour coefficient directeur $A = \frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\mathrm{Var}(X)}$.

et passe par le point moyen $(\bar{x};\bar{y}) = (5;265)$.

On calcule $A$ : $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{9}(x_i-5)^2 = 60. \\ \sum_{i=1}^{9}(x_i-5)(y_i-265) = 5680\end{array}\right\} \quad A = \frac{5680}{60} \simeq 94{,}7.$$

Une équation de $(d)$ est donc : $y = \frac{284}{3}(x-5) + 265$.

7. cf. annexe

8. On estime le CA de 2022 à environ 740 000 € par la méthode des moindres carrés.

Chiffre d'affaires de LogiEntreprise en fonction du rang de l'année.